ГАОУ ВПО «Дагестанский государственный институт народного хозяйства»

Гаджиева Халимат Хайрудиновна

Учебное пособие (курс лекций)

по дисциплине

«Экономико-математические методы и моделирование»

Махачкала – 2012

УДК 332.3:330.46 (075.8)
ББК 65.32 – 5я73
Г 13

Разработчик: Гаджиева Халимат Хайрудиновна, преподаватель кафедры «Математические методы в экономике»

Внутренний рецензент: Атагишиева Гульнара Солтанмурадовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математические методы в экономике»
Внешний рецензент: Ибрагимов Мурад Гаджиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный университет»

Аннотация.

В учебном пособии последовательно изложены основы экономико-математических методов и моделей, широко применяемых в настоящее время в процессе землеустроительного проектирования. Даны общие сведения о применении математических методов и моделирования для решения землеустроительных задач. Подробно рассмотрено применение экономико-статистических моделей, базирующихся на аппарате производственных функций, включая методы корреляционно-регрессионного анализа и методы исследования экономических характеристик производственных функций в землеустройстве. Большое внимание уделено применению линейных моделей - распределительным моделям и общим моделям линейного программирования, в том числе методам детального экономико-математического анализа и корректировки оптимальных решений землеустроительных задач.

Содержание

Тема 1: Общие сведения о применении математических методов и моделировании в землеустройстве.

1. Понятие модели и моделирования .
2. Типы, виды и классы математических моделей, применяемых в землеустройстве.
3. Требования, предъявляемые к использованию экономико-математических методов и моделей.

Понятие модели и моделирования

Термин «модель» происходит от латинского *modulus* — образец, норма, мера. Модель является частным случаем аналогии — важного метода научного познания. В любых отраслях знания при объяснении сложных явлений или процессов исследователь чаще всего ищет сходства с тем, что уже известно науке. Таким образом, люди стремятся к объяснению неизвестного, непонятного через известное и уже понятое.

Сходство или аналогию в жизни можно встретить повсеместно. Например, макет (модель) здания воспроизводит его архитектуру, топографо-геодезическая карта местности говорит о характере ландшафта, модель корабля или самолета свидетельствует об их внешнем виде, возможностях, пропорциях. Наиболее известны три типа моделей: геометрические, физические, математические.

Геометрические модели представляют некоторый объект, геометрически подобный своему прототипу (оригиналу). Они дают внешнее представление об оригинале и большей частью служат для демонстрационных целей. К этому виду моделей можно отнести репродукции или копии картин, написанных одинаковыми красками по определенной технологии, других живописных изделий (икон, фресок); слепки, выполненные в натуральную величину из того же материала, что и оригинал, или из другого материала (копии скульптуры); демонстрационные модели деталей машины, муляжи плодов и др. Чаще, однако, модели выполняются в другом масштабе (макет здания, модель корабля, топографо-геодезический макет местности, модель почвенного разреза).

Физические модели отражают подобие между оригиналом и моделью не только с точки зрения их формы и геометрических пропорций, но и с точки зрения происходящих в них основных физических процессов. По своей природе они могут быть механическими, гидравлическими, электрическими.

При физическом моделировании модель и ее прототип всегда являются объектами, имеющими одинаковую физическую природу. Типичные примеры — определение аэродинамических свойств летательных аппаратов путем «продувки» их моделей в аэродинамической трубе, исследование предполагаемого «поведения» гидротехнических сооружений (плотин, дамб, шлюзов и т. д.) путем проведения испытаний аналогичных объектов значительно меньших размеров, сконструированных специально для этих целей, и т. д. В данном случае изменяются не только геометрические размеры модели, но соответственно им и другие физические свойства объекта. Например, при построении модели плотины в 1/10 натуральной величины в 10 раз уменьшается и давление на нее воды, что должно учитываться в дальнейшем при строительстве.

Геометрические и физические модели относятся к классу вещественных (материальных) моделей. Они являются или материальными копиями, или физически действующими устройствами (например, модель трактора или ирригационной системы), точно копируя объект или заметно отличаясь от него, сохраняя общность лишь в принципах строения или функционирования.

Математические модели представляют собой абстрактные описания объектов, явлений или процессов с помощью знаков (символов), поэтому их называют также абстрактными или знаковыми. Обычно они имеют вид некой совокупности уравнений или неравенств, таблиц, графиков, формул и других средств математического описания моделируемых объектов, явлений, процессов.

Математические модели применяются, как правило, в тех случаях, когда геометрическое или физическое моделирование объекта затруднено или невозможно вообще. Они имеют особую структуру, отражающую свойства объекта, проявляемые им в конкретных условиях его функционирования. Такие модели широко используются в астрономии, физике, механике, структурной лингвистике.

В экономике и землеустройстве геометрические и физические модели применяются крайне редко. Примером могут служить экспериментальные системы ведения сельского хозяйства, экспериментальные севообороты, системы расселения и организации территории, освоение которых происходит в течение многих лет и эффективность которых проявляется также через многие годы. Как правило, в этих науках пользуются математическими моделями.

Все модели обладают рядом общих свойств:

- они подобны изучаемому объекту и отражают его наиболее существенные стороны;
- при исследовании модели способны замещать изучаемый объект, явление или процесс;
- они дают информацию не только о самом моделируемом объекте, но и о его предполагаемом поведении при изменяющихся условиях.

Таким образом, основное назначение модели — служить средством познания оригинала. При этом нет необходимости, чтобы модель отражала абсолютно все свойства изучаемого объекта (которых может быть бесчисленное множество). Создавая модель, исследователь должен заранее поставить конкретную цель, определяющую ее характер. Для решения практических задач крайне важно обеспечить такое подобие модели оригиналу, при котором в наиболее существенных аспектах достигается цель моделирования.

Под *моделированием* в узком смысле слова мы понимаем построение модели изучаемого объекта, явления или процесса.

Объект — это физическое (материальное) тело, вещь. Для его изучения используются, как правило, геометрические модели (хотя современные компьютерные технологии позволяют создавать и цифровые математические модели материальных объектов).

Явление — это внешние свойства и признаки предмета, постигаемые через ощущение, восприятие, представление. Например, цветок —это объект (предмет), а его свойства проявляются через форму, цвет, запах. В парфюмерной промышленности моделируются запахи, в текстильной — цветовая гамма и формы.

В явлениях обнаруживаются законы: так, упавшее яблоко натолкнуло И. Ньютона на мысль о законе всемирного тяготения.

Особенно важно изучение с помощью моделей экономических явлений. Например, цена (явление) отражает объективно действующий экономический закон стоимости. Поэтому моделирование цен может помочь сознательно использовать закон стоимости в экономической политике государства.

Процесс — это ход, развитие явления, последовательная смена состояний объекта. Если явление представляет статическое, постоянное качество, то процесс всегда обладает динамическими характеристиками. Например, цепная реакция — это процесс, используемый в атомной энергетике. Моделирование роста и развития растений в биологии — это моделирование процессов.

Термины «модель» и «моделирование» относятся к понятиям *кибернетики* — науки, изучающей общие закономерности строения и функционирования сложных систем управления. Так как любые процессы управления связаны с принятием решений на основе получаемой информации, то кибернетику часто определяют как *науку об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных управляющих системах.*

Экономическая кибернетика использует наряду с понятиями «модель» и «моделирование», ряд других: «система», «информация», «управление».

Системой называется относительно обособленная и упорядоченная совокупность обладающих особой связностью и целесообразно взаимодействующих элементов, способных реализовать определенные функции. Более кратко система определяется как *упорядоченная совокупность элементов, рассматриваемых во взаимодействии.*

Информация — это совокупность сведений о состоянии системы, ее подсистем и элементов, а также о происходящих в них процессах.

Управление — это процесс целенаправленного воздействия на управляемую систему на основе имеющейся информации с целью обеспечить ее контролируемое поведение при изменяющихся внешних условиях.

С точки зрения кибернетики объектами моделирования являются системы, а само моделирование предполагает, что имеются две системы:

система-оригинал, которой мы управляем или должны управлять;

модель системы, ее аналог, который позволяет раскрыть свойства системы-оригинала, изучить закономерности ее поведения и получить информацию для воздействия на систему-оригинал в желаемом направлении.

Метод моделирования, сочетающий приемы эмпирического (опытного, экспериментального) и теоретического познания, эффективно используется в самых различных областях науки. Благодаря ему удается зафиксировать и упорядочить имеющуюся информацию об объектах, объяснить некоторые их свойства и сложные зависимости, получить новую информацию о еще неизвестных свойствах, о возможных изменениях состояния объектов, проверить возникающие при этом гипотезы и теоретические предположения. Еще древние атомисты (Демокрит, Эпикур, Лукреций Кар) строили мысленные модели атома, их движения и соединения между собой, стремясь объяснить при помощи этих моделей физические свойства вещей.

На протяжении столетий шла борьба между сторонниками геоцентрической и гелиоцентрической моделей Вселенной, Бурное развитие механики в XVII—XIX вв. породило представление о том, что все явления действительности можно свести к механическому движению и объяснить механическими моделями. В конце XIX — начале XX в. в связи с возникновением теории относительности и квантовой механики пришло понимание ограниченности классической физики. На первый план выдвинулись знаковые модели, представляющие собой описание явлений с помощью математических символов. Уже в это время метод моделирования широко входит в практику научного эксперимента.

В математике моделями пользовались с самого ее зарождения. По мере развития математики, совершенствования ее методов и средств круг объектов математического моделирования постоянно расширялся. Термин «модель» вошел в математику в прошлом столетии в связи с возникновением неевклидовых геометрий Лобачевского, Бойяи, Римана.

Теория моделирования дает ответ и на вопрос о роли проектирования (архитектурного, строительного, планировочного и застроечного, землеустроительного и др.). При проектировании также используется принцип аналогии, но специалиста-проектировщика интересует не форма, а функциональное назначение и структура объекта. Так, например, само здание и его архитектурный проект (чертеж) аналогичны по функциональному назначению и структуре, хотя внешнего сходства форм здесь не прослеживается.

Особенно отчетливо принцип аналогии проявляется при разработке проекта землеустройства. Если здания можно «построить» на дисплее компьютера, то это практически невозможно для проекта землеустройства. Реальная организация территории на местности может получить завершенную форму только через много лет, когда будут проложены дороги, заложены сады и лесополосы, построены здания и сооружения, мелиоративные сети, введены и освоены севообороты и т.д. Поэтому проект землеустройства представляет собой своеобразную модель организации территории землевладения и землепользования на перспективу; основным методом его разработки является метод математического моделирования.

Резюмируя сказанное, мы можем определить *математическое моделирование* как формализованное представление поведения реальных систем в виде абстрактных аналогов, описанных системами уравнений, неравенств и другими способами, применяемыми в математике.

2.Типы, виды и классы математических моделей, применяемых в землеустройстве.

Целесообразность применения математических методов, в том числе математических моделей в землеустройстве, обусловлена следующими факторами.

1. Математические методы позволяют находить наиболее целесообразные решения по перераспределению, использованию и охране земельных ресурсов, начиная от конкретных сельскохозяйственных предприятий- до народного хозяйства в целом.
2. Оптимальные планы использования производственных ресурсов, связанных с землей, способствуют достижению заданных объемов производства при минимальных затратах труда и средств. В результате этого повышается производительность труда, ускоряются темпы воспроизводства в хозяйстве.
3. Результаты, полученные математическими методами, позволяют создать наилучшие организационно-территориальные условия, способствующие повышению урожайности сельскохозяйственных культур, повышению плодородия, прекращению и предотвращению процессов эрозии, воспроизводительному использованию техники.
4. Благодаря применению математических методов, особенно в сочетании с ЭВМ, улучшается качество подготовки информации и ее использования. Землеустроительная наука получает возможность стать точной, поднимаясь, тем самым, на более высокую степень
5. Применение математических методов способствует не только улучшению экономических показателей, но и экологических, социальных и технических показателей проекта землеустройства.
6. Математические методы, по сути, являются связующим звеном между землеустройством и техническими науками, изучающими сельское хозяйство как с природоохранительной, так и с экономической и социальной сторон.
7. Внедрение математических методов и вычислительной техники в землеустройство позволит перестроить всю систему землеустроительного проектирования, организации планирования землеустроительных работ, освободить значительное количество квалифицированных работников от малопродуктивного труда и с большой пользой использовать их для решения практических задач организации рационального использования и охраны земель в России.

В настоящее время для решения землеустроительных задач различных классов используются разнообразные виды экономико-математических моделей, позволяющих проводить анализ использования земельных ресурсов, выявить определённые тенденции и находить оптимальные варианты устройства территории.

По современным взглядам при классификации математических моделей, применяемых в землеустройстве, целесообразно использовать пять основных классификационных признаков:

1. вид проектной документации;
2. степень определенности информации;
3. вид (форма) землеустройства или землеустроительного действия;
4. математические методы, лежащие в основе модели;
5. класс проекта землеустройства.

Классификация моделей по данным признакам приведена в таблице.

Классификационный признак	***Виды моделей***
Вид проектной документации	**Графические** (дают характеристику различным элементам проекта землеустройства или их совокупности, которые показываются на проектном плане) **Экономические** (применяемые в землеустройстве, представляют собой облеченные в математический вид различные расчеты проектов землеустройства)
Степень определенности информации	**Детерминированные**(основаны либо на абсолютно точной информации, либо на сведениях, которые считают точными) **Стохастические** (основаны на информации, имеющей вероятностный характер)
Вид (форма) землеустройства или землеустроительного действия	Межотраслевые Межхозяйственного землеустройства Внутрихозяйственного землеустройства Рабочего проектирования (для решения задач, связанных с инвестициями)

Математические методы, лежащие в основе модели	Аналитические (дифференциального исчисления) Экономико-статистические (математической статистики) Оптимизационные (математического программирования) Балансовые (межотраслевого баланса) Сетевого планирования и управления

Широкое применение в землеустройстве находят *аналитические модели*, представляющие собой определенную функцию, выражающую взаимосвязь между несколькими признаками (показателями). В основу их построения заложено два исходных принципа:

предполагается, что аналитическая модель имеет функциональный характер, то есть задается формулой, графиком, таблицей или другим способом, в котором каждому значению фактора (независимой переменной) или совокупности значений факторов в множественных зависимостях соответствует строго определенное значение результативного показателя;

имеется в виду, что аналитические модели являются детерминированными, то есть они основаны не только на математической связи между переменными, но также предполагается, что отсутствуют случайные (вероятностные) воздействия на эти переменные.

В землеустройство первые аналитические модели (функции) пришли из геодезии; при проектировании они использовались для расчета различных технических показателей:

площадей земельных участков различной конфигурации (севооборотов, полей, загонов очередного стравливания, рабочих участков, землевладений и землепользовании и т.д.);

средних расстояний от хозяйственных центров до угодий;

уклонов местности (эти показатели позволяют оценить проект землеустройства с точки зрения учета рельефа);

коэффициентов компактности землепользовании, дальноземелья, вытянутости, защищенности полей лесополосами и др., дающих возможность оценить конфигурацию земельных участков, их форму, местоположение населенных пунктов и производственных центров на территории и т. д.

На основании аналитических моделей производился расчет различных экономических характеристик проекта землеустройства. Так, например, средние расстояния использовались для оценки транспортных расходов на перевозку грузов и рабочих; уклоны по рабочим направлениям —для анализа затрат по обработке полей и рабочих участков; коэффициенты защищенности полей лесополосами — для расчета стоимости дополнительной продукции полеводства, получаемой за счет агроклиматического воздействия лесных насаждений и т.д.

Аналитические модели в землеустройстве основаны на применении классических математических методов: геометрии, тригонометрии, алгебры, дифференциального и интегрального исчислений и т. д. Для их построения могут применяться как уже известные, так и новые теоремы и формулы. В моделях используются различные математические величины: средние взвешенные, средние геометрические, средние арифметические и т.д.

Так, аналитическая модель рабочего уклона в полях с прямыми склонами, полученная с использованием классической геометрии, выглядит следующим образом:

$$i_p = \frac{P}{D} \cdot 100$$

где i_p — рабочий уклон, %; P — превышение, м; D — горизонтальное положение, м.

Общий средний уклон местности в процентах (i_M) на территории севооборота или поля может вычисляться по формуле

$$i_M = \frac{C \cdot h \cdot 100}{P}$$

где C —длина всех горизонталей на территории севооборота (или поля), м; h —сечение рельефа, м; P- площадь севооборота (поля), м^2.

Пусть, например, на площади севооборота 1500 га (15 000 000 м^2) все имеющиеся горизонтали дают длину 75 км (75 000 м), сечение рельефа 5 м. Тогда

$$i_M = \frac{75000 \cdot 5 \cdot 100}{15000000} = 2{,}5\%$$

При аналитическом способе вычисления площадей и проектировании различных земельных участков помимо общеизвестных формул геометрии в землеустройстве наиболее применимыми являются следующие аналитические модели площадей треугольников и четырехугольников (рис, 1), которые легко доказываются.

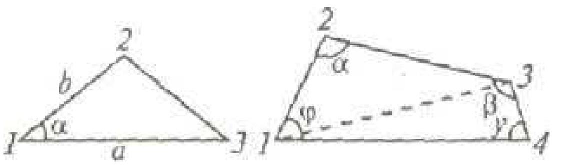


Рис. 1. Обозначения, используемые при вычислении площадей треугольников и четырехугольников.

Для треугольников

$$P = \frac{ab\sin\alpha}{2} \quad \text{или} \quad 2P = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$$

Для четырехугольников

$$2P = ab\sin\alpha + cd\sin\gamma \quad \text{или} \quad 2P = (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)$$

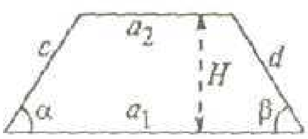
где P — площадь участка; x и y — координаты вершин участка.

Пользуясь этими формулами, можно вычислить площадь любого пятиугольника или шестиугольника.

При проектировании участков, имеющих форму трапеции (рис.2), в землеустройстве широко используется следующая аналитическая модель:

$$2P = \frac{a_1^2 - a_2^2}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

Рис.2. Обозначения, используемые при вычислении площадей трапеций



При вычислении средней длины поля (рабочего участка), имеющего форму трапеции, применяются следующие формулы:

$$L = \frac{P}{B};\ B = \frac{3H + c + d}{5};\ L = \frac{5P}{3H + c + d}$$

где L — средняя условная длина поля; B — средняя условная ширина поля; c и d - длины скошенных сторон трапеции; H— высота трапеции.

Например, если c = 400 м, d = 600м, H = 300 м, P= 100 га (1000 000 м^2), то

$$L = \frac{5 \cdot 1000000}{3 \cdot 300 + 400 + 600} = 2632\ м$$

Аналитические модели в землеустройстве, как и любые функции, обладают определенными свойствами, учет которых позволяет принимать различные экономические решения. Важнейшие из них, которые обычно выделяют математики-экономисты (Замков О. О,, Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике/Под ред. А. В. Сидорова. — М.: Дело и сервис. Изд. 2-е, 1999. - С. 24—26):

четность и нечетность; наличие нулей функции;

периодичность; монотонность; наличие асимптот;

наличие ограничений и обратной функции;

степень сложности и явность-неявность функции;

наличие экстремума.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого значения аргумента из области ее определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Сумма, разность, произведение и частное четных функций также являются четными.

Нечетной называется функция, в которой для любого значения аргумента из области ее определения выполняется равенство $f(-x) = —f(x)$. Сумма и разность нечетных функций являются также нечетными, а их произведение или частное — четными функциями.

График четной функции симметричен относительно вертикальной оси, а нечетной — относительно центра координат.

Ряд функций нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным. Эти функции не являются симметричными относительно центра или осей координат, поэтому их называют *аморфными*.

Нулями функции называются те значения аргумента, при которых она обращается в нуль, $y=f(x)=0$.

Периодическими называются функции, которые предполагают существование такого числа *T*, которое для каждого значения аргумента из области определения функции обеспечивает выполнение равенства $f(x) =f(x + T)$, где *T*— период функции. Периодическими являются функции $y = \sin(x)$, $y = cos(x)$, $y = tg(x)$, $y=ctg(x)$.

Монотонными являются функции, возрастающие или убывающие на некотором участке их определения. Функция $y =f(x)$ называется возрастающей на промежутке, если для любых значений *x* из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Напротив, она будет убывающей, если для любых значений *x* из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Ряд функций характеризуется наличием *асимптот* — прямых линий, к которым сколь угодно близко приближается данная функция при стремлении аргумента к бесконечности или некоторому числу. Асимптоты бывают горизонтальными, вертикальными и наклонными.

Функция называется *ограниченной сверху*, если существует такое число *M*, что для всех *x* из области ее определения выполняется неравенство $f(x)< M$, *ограниченной снизу* — если существует число *m* такое, что для всех *x* справедливо $f(x) > m$.

Неявной называется функция, заданная в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно *y*.

Изучая свойства функций, мы фактически исследуем свойства соответствующей аналитической модели.

Одним из основных свойств аналитических моделей, применяемых в землеустройстве, является наличие *экстремума*, то есть минимального или максимального значения функции в границах изменения ее аргумента. Экстремальное значение аналитической модели, как правило, является оптимальным, то есть лучшим для поставленной задачи. Именно такие значения используют в проектах землеустройства.

Некоторые теоретические вопросы математического моделирования в землеустройстве.

В условиях интенсификации сельского хозяйства большое значение приобретает проблема эффективного использования земельных ресурсов. В научно обоснованном ее решении особая роль принадлежит умению квалифицированно анализировать имевшиеся в прошлом тенденции, делать обоснованные выводы, применять их для планирования и прогнозирования использования земель и находить оптимальные решения.

При этом приходится сталкиваться с такими задачами, эффективное решение которых практически невозможно без использования математических методов и электронно-вычислительной техники.

Математические методы позволяют решать большой круг экономических и землеустроительных задач, связанных с использованием земельных ресурсов, определением перспективных параметров экономических показателей, обоснованием оптимальных вариантов устройства территории, а также использования материальных, трудовых и денежных ресурсов.

В процессе становления математических методов и их применения в землеустройстве возникли новые проблемы теоретического порядка.

Вопрос о характере математического аппарата, который применяется для исследования сельскохозяйственного производства, особенности получения исходной информации, её обработки и использования, многообразие землеустроительных задач, решаемых на различных уровнях, начиная от составления Генеральной схемы использования земельных ресурсов в стране и кончая устройством территории отдельных сельскохозяйственных предприятий — вызывают необходимость дифференциации различных математических методов и разработки теории их применения.

В основе применения математических методов исследования в землеустройстве лежит моделирование изучаемого экономического явления или процесса, представляющее построение математической модели.

При исследовании экономических явлений о сельском хозяйстве и в землеустройстве пользуются экономико-математическими моделями.

Понятие экономико-математические модели определяется по-разному, в зависимости от конкретных форм ее применения. В наиболее общем виде она определяется как упрошенная конструкция, предназначенная для объяснения экономических явлений или процессов, происходящих в действительности, и воздействия на нее.

Своего рода графической моделью является проект землеустройства. Однако такая модель довольно схематична, а для ее проверки необходимо прибегать к длительному опыту. Кроме того, она не всегда определяет рациональную организацию территории и во многом зависит от квалификации проектировщика. Это обуславливает необходимость применения в землеустройстве точных цифровых моделей в сочетании с графическим решением вопроса, что позволит более качественно решать вопросы устройства территории.

Математические модели, применяемые в землеустройстве, имеют свои особенности. Это связано с тем, что земля имеет ряд специфических свойств, которые сильно отличают ее от других средств производства.

Кроме того, использование земли как природного фактора зависит от наличия и параметров различных ресурсов производства (денежных, материальных, трудовых), а обеспеченность землями различного качества определяет необходимые размеры этих ресурсов и экономические показатели производства.

Например, количественный и качественный состав угодий, возможности вовлечения в оборот неиспользуемых или слабоисполъзуемых земель оказывают большое влияние на специализацию хозяйства и его производственных подразделений, на соотношение и объем производства.

Местоположение хозяйства, обеспеченность трудовыми ресурсами и средствами производства, наличие денежных средств, направленных на развитие хозяйства, его специализация оказывают обратное влияние на состав и плошали угодий и севооборотов и устройство их территории. Следовательно, размеры производства и территория взаимосвязаны и взаимообусловлены, примем в каждом конкретном хозяйстве может быть установлен свой вариант их соотношения.

В связи с этим математические модели должны давать сведения не только об экономических характеристиках производства, но и о характере использования земли. Изложенное позволяет сформулировать понятие математической модели применительно к землеустройству следующим образом.

Математической моделью называется особая система, характеризующая и связывающая воедино наиболее существенные экономические показатели и параметры производства и территории.

При построении математических моделей в землеустройстве возникает вопрос об установлении их класса, степени сложности и конструктивных особенностей. Класс модели определяется целью решаемой задачи и спецификой ее постановки. С точки зрения народнохозяйственного значения землеустроительных проблем и охвата объектов землеустроительного проектирования математические модели можно подразделить на следующие классы.

1.Класс общеотраслевых математических моделей, обеспечивающих решение задач по прогнозированию и оптимальному планированию использования земельных и связанных с ними ресурсов в республике, крае, области, районе (при составлении схем использования земельных ресурсов).

2.Класс моделей межхозяйственного землеустройства, позволяющих решать задачи по межхозяйственному устройству территории. К этому классу относятся задами по определению оптимальных размеров землепользований и рациональному размещению производства на территории, по наиболее целесообразной ликвидации недостатков в использовании земель, по установлению наилучшего размера населенных пунктов и их территориальному размещению и др.

3.Ктасс моделей внутрихозяйственного землеустройства. Модели этого класса предназначены для решения вопросов наиболее полного рационального и эффективного использования земель и организации производства в конкретных сельскохозяйственных предприятиях. Основными задачами данного класса являются следующие: установление оптимального сочетания отраслей, состава и площадей угодий, определение видов, количества и площадей и севооборотов и их размещение, рациональная организация кормопроизводства, планирование грузоперевозок, планирование комплекса мелиоративных работ, оптимальная трансформация угодий, установление оптимальных размеров производстве иных подразделений хозяйств и др.

Сложность математических моделей зависит от числа учитываемых факторов и характера взаимосвязи между ними, от наличия, точности и достоверности исходной информации и непосредственно от изучаемого процесса или явления. Сложностью определяются и конструктивные особенности моделей (число неизвестных, их степени, количество условий, виды целевой функции и др.).

Для решения землеустроительных задач различных классов используется разнообразное количество математических моделей позволяющих анализировать использование земельных ресурсов, выявлять определенные тенденции и находить оптимальные варианты устройства территории.

Изучение математических моделей, применяемых в землеустройстве, позволило сгруппировать их следующим образом (рисунок).

Все модели подразделяются на три большие группы: экономико-математические, экономико-статистические и аналитические.

Экономико-математические модели используются для разработки оптимальных реакций проекта землеустройства, балансовые (см. рисунок)- для дальнейшего проектирования и обоснования принятых решений (балансы кормов, труда, расчеты населения на перспективу и т.д.)

При помощи экономико-статистических моделей осуществляется анализ производства, подготавливается необходимая информация для использования оптимизационных методов производится оценка проектировочных решений.

Аналитические модели также применяются в целях подготовки исходной информации и обоснования проектных решений. С их помощью рассчитывают рабочие уклоны, определяют среднюю условную длину полей и рабочих участков, находят различные технические параметры, используемые для проектирования и т.д.

Классификация экономико-математических моделей предложена Браславцем М.Е. Он подразделяет экономико-математические модели на детерминистические, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных, и стохастические, описывающие случайные процессы, подчиняющиеся законам теории вероятности. Детерминистические модели при этом делятся на балансовые и оптимизационные. Данная группировка по существу отражает также и состав экономико-математических моделей, применяемых в землеустройстве.

Однако исследования показывают, что при разработке проектов применяются различные виды оптимизационных моделей, что требует углубления и классификации.

В связи с этим, современная оптимизационное моделирование в землеустройстве выступает в двух видах: комбинированном и дифференцированном.

При комбинированном моделировании все вопросы землеустроительного проекта решаются комплексно по всем составным частям и элементам. Этот вид моделирования является более правильным, однако он приводит к громоздким задачам, решение которых затруднительно.

Дифференцированное моделирование заключается в последовательном решении частных задач проекта в сочетании с традиционные методами. Модели при этом получаются значительно меньшего объема и их решение существенно облегчается.

Дифференцированное моделирование связано также с аппроксимацией комбинированных моделей. Аппроксимация происходит в следующих видах: либо модель рассматривает часть сложной систем, абстрагируясь от всех других ее сторон — частная аппроксимация (моделирование отдельных элементов проекта внутрихозяйственного землеустройства),либо модель упрощается, чтобы быть в дальнейшем запрограммировано с последующим наращиванием информации — полная аппроксимация (упрощенная модель проекта). Последний способ аппроксимации моделей является процессом последовательного накопления в серии аппроксимирующихся (частных) моделей информации о всей моделируемой системе. Данный способ применяется и при постепенной проверке алгоритма модели.

Такая постановка вопроса может быть проиллюстрирована на следующем примере.

При организации угодий и севооборотов, моделируются и решаются следующие вопросы: установление состава и площадей угодий, типов, видов и количества севооборотов, трансформация угодий, размещение угодий и севооборотов. При решении отдельных вопросов организации угодий и севооборотов с использованием моделей необходимо применять дифференцированное моделирование, при совместном — комплексное. Следует иметь в виду, что в первом случае необходимо учитывать взаимосвязь всех проектировочных решений организации угодий и севооборотов, что во многом определяет совместное применение моделирования и традиционных методов.

Проект внутрихозяйственного землеустройства может аппроксимироваться в моделируемые составные части и упрощенную модель. Моделируемая составная часть, рассматривающая отдельную сторону проекта и взаимосвязанная с другими составными частям, выражает первый способ аппроксимации. Упрощенная модель проекта землеустройства, которая при накоплении информации уточняется, представляет второй способ аппроксимации.

Экономико-математическое моделирование в землеустройстве проводится в несколько стадий, основными из которых являются:

1) постановка задачи (словесная формулировка с экономическим анализом количественных зависимостей);

2) математическая формулировка задачи (составление экономико-математической модели);

3) сбор необходимых данных в составление исходной матрицы;

4) решение задачи;

5) анализ полученных результатов.

Первый этап предполагает установление объекта моделирования, его описание, формулировку цели задачи и выбор критерия оптимальности.

Землеустроительные проблемы тесно связаны с экономическими вопросами развития сельского хозяйства исследуемых объектов. Поэтому целевые установки отдельных задач в основном определяют экономический результат, который должен, быть достигнут при решении вопросов использования земель, а следовательно, и критерий оптимальности поставленной задачи.

При решении землеустроительных задач применяются различные критерии оптимальности. Общим правилом их построения является условие преимущественного значения народнохозяйственных интересов в использовании земель с соблюдением приоритета сельского хозяйства.

Составление экономико-математической модели заключается в установлении связи между исходными данными и исковыми неизвестными в виде уравнений и неравенств. Так, например, при решении вопросов трансформации угодий устанавливается связь между наличием мелиоративного фонда, затратами на перевод угодий в другие виды и общим объемом капиталовложений, отпущенных на трансформацию.

При этом определяется эффективность капиталовложений. Кроме того, устанавливается зависимость между размерами трансформации и наличием в хозяйстве трудовых ресурсов, техники. Намечается компенсация утраченной пашни и других сельскохозяйственных угодий.

Экономико-статистическое моделирование осуществляется в следующем порядке:

1) определение цели решаемой задачи, экономический анализ н выявление факторов, влияющих на целевой результат;

2) определение математической формы связи независимых переменных (факторов) и результата;

3) сбор необходимых данных и их обработка;

4) вычисление параметров экономико-статистической модели;

5) анализ полученных данных, экономическая оценка и интерпретация модели.

Экономико-статистические модели могут быть представлены в виде производственных функций.

Математические модели в землеустройстве дают возможность не только определить взаимосвязи между изучаемыми явлениями, но и установить вид вычислительной техники, количество и точность требуемой для решения информации. Полученные при реализации моделей данные анализируют, в случае необходимости корректируют применительно к конкретным природно-экономическим условиям и используют для целей проектирования и обоснования принятых решений.

3. Требования, предъявляемые к использованию экономико-математических методов и моделей.

Практика показывает, что экономико-математические методы в землеустройстве оказываются полезными лишь в том случае, когда выдержаны определенные требования к их применению.

1. Прежде всего не следует забывать, что в основе экономико-математического моделирования лежат количественные методы анализа. Это предполагает детальное изучение объекта проектирования, выявление различных зависимостей и взаимосвязей, их математическое описание в виде набора переменных величин, уравнений, неравенств и т.д. Вместе с тем никакие математические методы не позволят принять приемлемое решение, если не будут в должной мере учтены выводы, полученные в ходе качественного анализа.

В основе такого анализа лежит здравый смысл, а также знание экономических законов, понятий и категорий, благодаря чему исключаются логические ошибки и заведомо неприемлемые решения. В конце концов математический аппарат — это лишь вспомогательное средство, орудие количественного анализа, а также техника, позволяющая более обоснованно, быстро и точно находить нужные решения, в основе которых всегда лежат качественные закономерности, изучаемые землеустроительной наукой.

2. Разрабатываемые модели должны учитывать экономические, технологические, землеустроительные, технические и другие условия, в которых находится землеустраиваемый объект.

К экономическим условиям относятся: размеры и сочетание отраслей, виды ресурсов, гарантированные объемы производства, условия реализации и распределения продукции. К технологическим — агротехнические особенности возделывания сельскохозяйственных культур, ветеринарные и зоотехнические требования к выращиванию животных и т. д.

Землеустроительные условия характеризуют особенности организации территории и производства (размещение населенных пунктов, земельных массивов производственных подразделений, производственных центров, организация угодий и устройство территории севооборотов, качество земель и т. д.); они составляют основу любой модели, которую предполагается использовать при землеустроительном проектировании.

Технические условия — это наличие у разработчика средств вычислительной техники и программного обеспечения, что диктует требования по выбору типа моделей, размерности задач, степени детализации решений. Другими словами, экономико-математические модели должны быть приведены к виду, позволяющему их решать на имеющейся вычислительной технике.

Учет всех перечисленных условий позволит построить экономико-математическую модель, наилучшим образом соответствующую изучаемому объекту, и избежать в последующем ее трудоемкой доработки и многочисленных корректировок полученных решений.

3. Возможности моделирования прямо связаны с качеством исходной информации. Никакое решение не будет приемлемым, даже если оно и получено с использованием самых современных методов, если в его основе лежат недостоверные, неполные или несвоевременно полученные данные. Поэтому необходимо учитывать, какие показатели реально могут быть получены на основе имеющихся статистических, экспериментальных и нормативных материалов. Кроме того, должно быть обеспечено соответствие между этой информацией и точностью применяемых математических методов в процессе реализации модели.

4. Использование экономико-математических методов и моделей не является самоцелью. Поэтому не нужно вводить ничего лишнего в условия задачи, заранее навязывать то или иное решение, пытаться «помочь» машине в выборе оптимума. Нельзя так же абсолютизировать полученные на компьютере результаты; их следует тщательно проанализировать, проверить и только потом использовать для дальнейших действий.

Необходимо иметь в виду, что полученное математическими методами оптимальное решение (математический оптимум) необязательно согласуется с экономической целесообразностью (экономическим оптимумом). Это часто бывает в тех случаях, когда модель не вполне адекватна изучаемому объекту. Тогда, оценивая решение логическим, экспертным или специальным математическим путем, а также осуществляя определенные корректировки, математический и экономический оптимумы приводят в соответствие.

Это достигается двумя основными способами — корректировкой самой модели с последующим решением новой задачи или же путем непосредственной корректировки решения без изменения модели. В первом случае изучают составленную модель, выявляют неучтенные факторы и вводят в модель соответствующие ограничения. Во втором случае результаты подправляют вручную и проводится их повторный анализ. Применение того или иного способа зависит от степени соответствия разработанной модели условиям рационального использования земель.

5. Экономико-математические модели не должны быть очень громоздкими, так как любое усложнение модели может привести к обратному эффекту —не к повышению точности решения, а к ее снижению из-за случайных или систематических ошибок, неизбежных при работе с приближенными числами. Кроме того, громоздкую модель очень трудно исправлять и модифици ровать.

Поэтому по возможности модели должны быть максимально упрощены, укрупнены и унифицированы. Необходимо, однако, иметь достаточное количество переменных и ограничений, которое позволяет получить приемлемое решение.

6. Одно из главных требований к моделированию — применение комплекса моделей, охватывающих все стороны проекта землеустройства, их логическая, информационная, технологическая и экономико-математическая увязка. Как правило, аналитические и экономико-статистические методы используются совместно или предшествуют оптимизационному моделированию, что объясняется рядом причин.

Во-первых, необходимы обработка имеющейся информации, ее анализ и оценка (для этого используют методы аналитических группировок, дисперсионный и факторный анализ, составляют ряды динамики, рассчитывают различные статистические величины—дисперсии, коэффициенты вариации и т.д., вычисляют технические показатели, используемые при составлении проекта,—рабочие уклоны, уклоны местности, определяют допустимые размеры межполосных участков и т. д.).

Во-вторых, необходима подготовка исходной информации непосредственно для целей проектирования и прогнозирования коэффициентов использования различных ресурсов, составления основной матрицы экономико-математической модели. Здесь также используют различные виды статистического анализа, строят производственные функции.

В-третьих, наличие в сельском хозяйстве непредсказуемых факторов, его зависимость от природно-климатических условий требуют оценки вероятности получения различных результатов. Знание выявленных таким путем закономерностей позволяет предвидеть, как различные случайные факторы будут сказываться при использовании модели.

На основании вышеизложенного можно кратко сформулировать основные требования, предъявляемые к использованию математических методов и моделей в землеустройстве:

- сочетание при моделировании количественного и качественного анализа с приоритетом последнего;
- учет экономических, технологических, землеустроительных, технических и других условий;
- использование надежной информационной базы, соответствующей целям решаемых задач и задаваемой точности вычислений;
- приведение в соответствие математического и экономического оптимумов путем анализа и корректировки моделей и результатов решений, полученных математическими методами;
- максимально возможное упрощение моделей, их унификация для более быстрого и экономичного решения землеустроительных задач при необходимой точности;
- комплексное применение математических методов и моделей различных типов в проектах землеустройства.

В любом случае при использовании в проектах экономико-математических методов и моделей следует руководствоваться общими принципами землеустройства и создавать организационно-территориальные условия, способствующие рациональному и эффективному использованию земель, повышению плодородия почвы и высокопроизводительному использованию техники с целью получения максимального количества продукции с каждого гектара земельных угодий при оптимальных затратах труда и средств.

Контрольные вопросы.

1) Дать разъяснения понятию «модель».
2) Что такое геометрические модели?
3) Что такое математические модели?
4) Что такое физические модели?
5) Каково назначение целевой функции в модели?
6) Каково назначение ограничений в модели?

7) Что такое план задачи математического программирования? Допустимый план? оптимальный план?
8) Назвать классы задач математического программирования?
9) Причислить основные факторы, обуславливающие целесообразность применения математических методов в землеустройстве.
10) Назовите основные признаки, используемые для классификации математических моделей, применяемых в землеустройстве.
11) Чем различаются стохастические и детерминированные модели?
12) В чем суть требования применения комплекса экономико-математических моделей?
13) Пояснить различия математического и экономического оптимумов.
14) Каковы основные разновидности условий, учитываемых при экономико-математическом моделировании в землеустройстве? Назовите их основные особенности.
15) На какие типы делятся математические модели, применяемые в землеустройстве учетом признака:

- «вид проектной документации»?
- «степень определенности информации»?
- «форма землеустроительного действия»?
-«математические методы, лежащие в основе модели»?
- «класс проекта землеустройства»?

16) Что такое комбинированное моделирование?

Тема 2: Общие сведения об экономико-статистическом моделировании.

1. Понятие и стадии экономико-статистического моделирования.
2. Понятия, виды и способы представления производственных функций.

1.Понятие и стадии экономико-статистического моделирования.

Среди моделей, применяемых в землеустройстве, экономико-статистические занимают одно из основных мест. На основе этих моделей рассчитывают ключевые показатели проектов землеустройства – урожайность сельскохозяйственных культур, продуктивность животных, выход продукции с сельскохозяйственных угодий, а также нормативы, закладываемые в проект (плотность дорог, облесенность территории, сельскохозяйственная освоенность земель, плотность застройки и др.). ошибки при определении этих показателей и нормативов влекут за собой кардинальные изменения в организации территории и приводят к несбалансированной организации производства.

Например, если в проектные землеустроительные расчеты будет заложена хотя бы только неправильная урожайность кормовых культур, возделываемых на пашне, нарушатся рационы кормления животных, изменятся баланс кормов, органических удобрений, питательных веществ в почве, соотношение между пашней и кормовыми угодьями, размещение полевых и кормовых севооборотов и, как следствие, вся организация территории с размещением полей, рабочих участков, дорог, лесополос и т.д.

Нужен математический аппарат, позволяющий разрабатывать как можно точнее соответствующие показатели и нормативы; с этой целью и используются экономико-статистические модели.

В землеустроительной науке экономико-статистической моделью называется функция, связывающая результативный и факторный показатели, выраженная в аналитическом, графическом, табличном или ином виде, построенная на основе массовых данных и обладающая статистической достоверностью.

В связи с тем, что в экономике такие функции обычно описывают зависимость результатов производства от имеющихся факторов, они получили название производственных. И так как в землеустройстве основные проектные решения носят экономический, территориально-производственный характер, то производственные функции составляют основу землеустроительных экономико-статистических моделей.

Для решения прикладных землеустроительных задач производственные функции стали широко использоваться начиная с 70-80-ч годов.

Процесс моделирования имеет несколько стадий:

- Экономический анализ производства, определение зависимой переменной и выявление факторов, влияющих на нее;
- Сбор статистических данных и их обработка;
- Определение математической формы связи между переменными (вида уравнения);
- Определение числовых параметров экономико-статистической модели;
- Оценка степени соответствия экономико-статистической модели изучаемому процессу;
- Экономическая интерпретация модели, анализ возможностей ее использования для решения конкретных землеустроительных задач

Экономический анализ производства заключается прежде всего в уяснении и определении цели решаемой задачи и выборе такого результативного показателя, который наилучшим образом аккумулирует в себе свойства изучаемого землеустроительного процесса и отражает его эффективность.

За зависимую переменную принимается такой показатель, который, исходя из поставленной цели исследования, наиболее полно характеризует изучаемый землеустроительный процесс.

Сбор статистических данных и их обработку производят после определения зависимой переменной (результативного показателя) и факторов-аргументов, влияющих на нее. При сборе информации использщуют экспериментальный и статистический методы.но в землеустройстве процесс экспериментирования затруднен, а при решении отдельных вопросов вообще невозможен. Второй метод основан на использовании статистических данных (сплошных или выборочных). Например, если при анализе размеров землепользований привлекают данные по всем сельскохозяйственным предприятиям области, то статистическая информация является сплошной, а изучаемая совокупность – генеральной. Однако размер генеральных совокупностей бывает слишком большим – несколько сотен единиц и более. Поэтому для сокращения расчетов и экономии времени число наблюдений обычно сокращают, получая выборочные данные (формируя выборочную совокупность) различными методами, позволяющими сохранить достоверность вычислений и распространить результаты исследований на генеральную совокупность.

Определение математической формы связи переменных осуществляется путем логического анализа изучаемого процесса, выбора наиболее подходящих уравнений с последующим их построением и оценкой. Содержательный анализ позволяет выбрать прямую или обратную связь, вид уравнения (линейное, нелинейное), форму связи (парная или множественная) и т.д.

Определение параметров модели – это расчет числовых характеристик выбранной ранее математической зависимости. Например, если для оценка зависимости урожайности озимой пшеницы (y) от балла экономической оценки земель по этой культуре (x) выбрана линейная взаимосвязь вида

$$y = a_0 + a_1 x,$$

то данная стадия моделирования заключается в получении числовых значений коэффициентов a_0 и a_1.

Для определения параметров экономико-статистических моделей могут применяться различные методы, но практика показывает, что самые точные результаты дает метод наименьших квадратов.

Оценка степени соответствия экономико-статистической модели изучаемому процессу осуществляется с использованием специальных коэффициентов (корреляции, детерминации, существенности и др.). Данные коэффициенты позволяют определять, можно ли использовать полученную модель для проведения последующих расчетов и принятия землеустроительных решений или нет, насколько точно определяется результативный показатель и с какой вероятностью можно доверять ему, соответствует ли выбранное математическое выражение изучаемому процессу. Подобная оценка опирается на методы корреляционно-регрессионного анализа и теории ошибок.

Экономическая интерпретация модели лежит в основе последующих землеустроительных решений, включая построение других экономико-математических моделей, разработку нормативов, экономическое обоснование проектов землеустройства.

2.Производственная функция.

Производственная функция – это математически выраженная зависимость результатов производства от производственных факторов. Формализованная символьная запись производственной функции имеет вид

$$y = y(x_1, x_2, ..., x_k)$$

где *у*- результативный показатель, $x_1, x_2, ..., x_k$ - величины, выражающие различные факторы производства. Величины $x_1, x_2, ..., x_k$, как правило, скаляры. Содержательно показатель у может быть, например, стоимостью валовой продукции, чистым доходом хозяйства и т.п. Величины $x_1, x_2, ..., x_k$ могут выражать качественную оценку земель, фондообеспеченность хозяйств, нормы внесения удобрений в почву и т.п.

Знание производственных функций позволяет проводить анализ роли различных производственных факторов, прогнозировать уровень результатов производства, оптимизировать производство тех или иных продуктов, оценивать допустимые пределы взаимозаменяемости различных ресурсов и т.д.

С помощью производственных функций в землеустройстве можно производить следующие действия:

- Анализировать состояние и использование земельных угодий
- Готовить исходную информацию для экономико-математических задач по оптимизации различных решений, входящих в проекты землеустройства
- Определять уровень результативного признака на перспективу при планировании и прогнозировании использования земель в схемах и проектах землеустройства
- Устанавливать экономические оптимуму, коэффициенты эластичности, эффективности и взаимозаменяемости факторов, то есть рассчитывать экономические характеристики производственных функций и использовать их при принятии решений.

Существует несколько способов представления производственных функций: табличный, графический, аналитический, номографический.

Табличный способ чаще всего применяется при изучении зависимостей, полученных в результате непосредственных наблюдений. Примером может служить зависимость производительности тракторных агрегатов от длины гона и крутизны склонов, где значения функции и аргументов представлены в таблице.

Графический способ более нагляден, однако точность определения значений функции при заданных значениях фактора ограничена. Такой способ используется, когда важно не столько конкретное значение, сколько направление и характер изменения показателей.

Как правило, графический способ представления производственных функций применяется тогда, когда на результат влияет только один фактор, благодаря чему получается наглядное двухмерное изображение на плоскости. Гораздо реже этот способ применяется в виде трехмерных изображений в пространстве, чтобы выразить влияние двух факторов.

Аналитический способ представления производственной функции является основным: это – уравнение, показывающее порядок вычисления результативного показателя при заданных факторах производства.

Номографический способ применяется для быстрого определения значений производственных функций и реализации аналитических форм связи между переменными, когда не требуется высокой точности результата. Он предполагает построение номограмм, отражающих ту или иную математическую зависимость.

Производственные функции делятся на следующие виды, в основе каждого из которых лежат разные аналитические зависимости.

1). Линейные зависимости:

а) для парной зависимости (зависимость результативного показателя только от одного производственного фактора):

$$y = a_0 + a_1 x,$$

б) для множественной зависимости (зависимость результативного показателя от двух и более производственных факторов):

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i;$$

2). Степенные зависимости:

а) для парной зависимости:

$$y = a_0 x^{\alpha_i};$$

б) для множественной зависимости (функция Кобба-Дугласа):

$$y = a_0 \prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i}.$$

3). Гиперболические зависимости (случай парной зависимости):

$$y = a_0 + \frac{a_1}{\sqrt[b]{x}};$$

в частном случае имеем уравнение гиперболы (b=1): $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$.

4). Полиномиальная зависимость (случай парной зависимости):

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n;$$

в частном случае (n=2) имеем уравнение параболы:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 .$$

5.) кинетические зависимости (случай множественной зависимости):

$$y = a_0 \prod_{i=1}^{k} (x_i^{\alpha_i} \exp(-J_i x_i)) .$$

6). Зависимости асимптотического роста (случай множественной зависимости):

$$y = a_0 - a_1 * 10^{-\sum_{i=1}^{k} b_i x_i}$$

Контрольные вопросы.

1) Что называют экономико-статистической моделью? Дайте общую характеристику назначения экономико-статистических моделей в землеустройстве.
2) В чем состоит различие функциональных и корреляционных экономико-статистических моделей?
3) Что такое производственные функции?
4) Описать кратко историю развития экономико-статистических методов в землеустройстве.
5) Что такое экономико-статистическое моделирование в землеустройстве?
6) Когда проводят получение статистических данных и их обработку? Какие методы при этом используют?
7) Что такое «генеральная совокупность» и «выборочная совокупность»?
8) Дать формализованное определение понятия производственной функции.
9) Какие типы задач можно решать, использую производственные функции?
10) Назвать основные способы представления производственных функций и охарактеризуйте области применения различных способов представлений.
11) Какие виды аналитических функций могут использоваться при построении производственных функций?
12) Описать области применения зависимостей различных видов.
13) Описать основные особенности стадии экономического анализа производства.
14) Охарактеризовать стадию определения параметров экономико-статистической модели.
15) Дать качественное графическое изображение парных зависимостей различных видов.

Тема 3: Определение параметров производственных функций.

1. Основные понятия и определения.
2. Понятие линейной модели регрессии.
3. Принцип наименьших квадратов.
4. Примеры систем нормальных уравнений для основных видов производственных функций.
5. Применение линейных моделей регрессии.

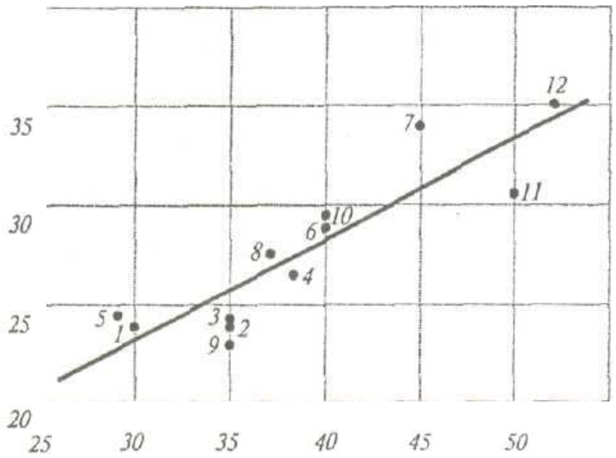
1.Основные понятия и определения.

Рассмотрим следующую задачу.
Для 12 участков хозяйства имеются оценка качества земли и средняя урожайность озимой пшеницы. По этим данным нужно установить функциональную зависимость урожайности *(y)* озимой пшеницы от балла оценки качества земли *(x)*.

Номера участков(j)	*Балл оценки земли* (x_j)	*Урожайность пшеницы, ц с 1 га* (y_j)
1.	30	23.5
2.	35	23.7
3.	35	24.0
4.	38	26.7
5.	29	24.3
6.	40	28.8
7.	45	33.5
8.	37	27.6
9.	35	23.0
10.	40	29.4
11.	50	30.5
12.	52	35.0

В двухмерной системе координат нанесем точки, координатами которых являются пары (x_j,y_j)из таблицы.

Графическое представление оценок качества земли (х, баллы) и урожайности пшеницы (у, ц с 1 га), полученные по результатам наблюдений на 12 участках



Очевидно, что по имеющимся оценкам по крайней мере проблематично построить однозначную зависимость *y=y(x)*. Так, например, трем точкам j=2,3,9, в которых оценки качества земли совпадают (x=35), соответствуют разные значения урожайности. Сравнение 4-й и 8-й точек показывает, что участку с большей оценкой качества земли необязательно соответствует большая урожайность культуры и т.д. то же время на рисунке явно прослеживается тенденция роста урожайности с ростом качества земли.

Причиной неоднозначности зависимости y = y(x), «неправильного» изменения урожайности в ряде случаев является влияние на результативный показатель помимо качества земли множества других факторов. Это могут быть эродированность участков, экспозиция, длина и форма склонов, качество обработки почвы, микроклиматические условия и т. д. В принципе невозможен столь полный учет всех факторов, при котором зависимость от них результата станет однозначной. Биологические и производственные процессы слишком сложны для достижения такой однозначности.

В действительности мы всегда имеем дело с той или иной степенью неопределенности при изучении зависимости результата производства от производственных факторов. Однозначные функциональные зависимости y = y(x) являются идеализацией, математической абстракцией, а реальная связь прослеживается лишь в среднем, то есть является корреляционной и стохастической. Это значит, что изменения факторов и результативного показателя коррелированы, но при этом можно указать только тенденцию изменения y при изменении $x_1, x_2, ..., x_k$, а не однозначную зависимость. Даже если такая тенденция четко прослеживается, одному и тому же значению факторов могут соответствовать различные значения результата.

Особенность изучения корреляционных взаимосвязей заключается в том, что никогда нельзя изолировать влияние посторонних факторов — либо потому, что эти факторы неизвестны, либо потому, что их изоляция невозможна. Метод корреляции нужен как раз для того, чтобы при сложном взаимодействии посторонних влияний выяснить, какова была бы зависимость между результатом и фактором, если бы эти посторонние факторы не искажали основную зависимость, что вполне достижимо при большом числе наблюдений.

Первая задача корреляционного анализа заключается в выявлении того, как изменяется в среднем результативный признак при изменении данного фактора, вторая — в определении степени влияния искажающих факторов.

С этой целью сначала находится уравнение связи, а затем определяется степень тесноты связи изучаемых переменных.

Рассмотрим еще раз приведенное на рисунке представление имеющихся данных (точки на графике) и попытаемся построить непрерывную линию y=f(x), отражающую общую тенденцию связи переменных. Для решения этой задачи необходимо на основе изучения природы рассматриваемого явления задать характер зависимости урожайности пшеницы от качества почвы. Она может быть линейной, квадратичной или какой-то другой; это значит, что нужно задать класс функций *f(x).* При отсутствии необходимых знаний о природе явления «подходящий» класс функций можно попытаться установить на основе визуального анализа графика или оценки выборочных коэффициентов корреляции, однако такие приемы можно рассматривать только как вспомогательные. Статистический анализ выборки, каким бы обстоятельным он ни был, не может заменить изучения самой природы явления.

2. Понятие линейной модели регрессии.

Парная регрессия-это уравнение, описывающее корреляционную связь между парой переменных: зависимой переменной (результатом) y и независимой переменной (фактором) x

$$y = f(x)$$

Функция может быть как линейной, так и нелинейной, например,

$\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \varepsilon$, или $y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$, или $\hat{y} = e^{a_0 + a_1 x + \varepsilon}$ и т.д.

Мы будем рассматривать прежде всего парную регрессию, описывающую линейную связь между двумя переменными, которая представлена в следующей форме:

$y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,N$, где

y_i - i-е значение зависимой переменной y;

x_i - i-е значение независимой переменной x;

a_0, a_1 - генеральные параметры парной линейной регрессии;

N- объем генеральной совокупности.

Это уравнение можно использовать для изучения зависимости потребления (y) от уровня доходов (x); инвестиций (y), от процентной ставки (x) и для многих других задач. Практически регрессия строится по данным выборки и записывается в виде:

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 x \quad \text{или} \quad y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$$

Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида:

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 x \qquad \text{или} \qquad y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$$

Уравнение вида $\hat{y}_x = a_0 + a_1 x$ позволяет по заданным значениям фактора x вычислять теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора x.

На графике теоретические значения представляют собой линию регрессии.

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров a_0 и a_1. Оценки параметров линейной регрессии могут быть найдены разными методами. Можно обратиться к полю корреляции и провести через них прямую линию. Далее по графику можно определить значения параметров. Параметр a_0 определим, как точку пересечения линии регрессии с осью OY, а параметр a_1 оценим, исходя из угла наклона линии регрессии, как dy/dx, dy - приращение результата y, а dx - приращение фактора x, т.е.

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 x$$

Параметр a_0 называют свободным членом регрессии; параметр a_1- коэффициент регрессии, который измеряет на сколько единиц в среднем изменится у при изменении х на одну единицу.

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций.

Различают два класса нелинейных регрессий:

1) регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам;
2) регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примером нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным могут служить следующие функции:

- полиномы разных степеней - $$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon, \quad y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \\ + d \cdot x^3 + \varepsilon;$$
- равносторонняя гипербола - $\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \varepsilon$.

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

- степенная - $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;
- показательная - $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- экспоненциальная - $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$.

Нелинейная регрессия по включенным переменным определяется, как и линейная, методом наименьших квадратов, так как функции линейны по параметрам.

Так в параболе $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$, заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \varepsilon,$$

для оценки параметров которого используется метод наименьших квадратов. По аналогии для полинома третьего порядка получим трехфакторную модель линейной регрессии.

Следовательно, полином любого порядка сводится к линейной регрессии с ее методами оценки параметров и проверки гипотез. Ограничения в использовании полиномов более высоких степеней связаны с требованием однородности исследуемой совокупности: чем выше порядок полинома, тем больше изгибов имеет кривая и соответственно менее однородна совокупность по результативному признаку.

Парабола второй степени целесообразна к применению, если для определенного интервала значений фактора меняется характер связи рассматриваемых признаков: прямая связь меняется на обратную или обратная на прямую. В этом случае определяется значение фактора, при котором достигается максимальное (или минимальное) значение результативного признака: приравниваем к нулю первую производную параболы второй степени :

$y = a + bx + cx^2$, т.е. $b + 2c \cdot x = 0$ и $x = -\dfrac{b}{2 \cdot c}$

Если же исходные данные не обнаруживают изменения направленности связи, то параметры параболы второго порядка становятся трудно интерпретируемыми, а форма связи часто заменяется другими нелинейными моделями.

3. Принцип наименьших квадратов.

МНК позволяет получать такие оценки параметров a_0 и a_1, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака (y) от расчетных (теоретических) значений $\hat{y}_x$ минимально

$$\sum_i (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 \to \min \qquad (*)$$

Иными словами, из всего множества линий линия регрессии на графике выбирается так, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали между точками и этой линией была бы минимальной:

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_x$$

Следовательно, $\sum_i \varepsilon^2{}_i \to \min$

Чтобы найти минимум функции (*) надо вычислить частные производные по каждому из параметров a_0 и a_1 и приравнять их к нулю

Обозначим $\sum_i \varepsilon_i{}^2$ через S, тогда:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

$$\frac{dS}{da_0} = -2\sum_{i=1} y_i + 2n \cdot a_0 + 2a_1 \sum x_i = 0$$

$$\frac{dS}{da_1} = -2\sum_{1} y_i \cdot x_i + 2a_0 \sum x_i + 2a_1 \sum x_i{}^2 = 0$$

Преобразуя формулу, получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a_0 и a_1.

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum \mathrm{x_i}^2 = \sum y_i x_i \end{cases} \qquad (3)$$

Решая систему нормальных уравнений (3) либо методами исключения переменных, либо методом определителей, искомые оценки параметров a_0 и a_1. Можно воспользоваться следующими готовыми формулами:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \qquad (4)$$

Формула (4) получена из первого уравнения системы (3), если все его члены разделить на n

$$y = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x{}^2}$$

Где *cov(x,y)* – ковариация признаков

$\sigma_x{}^2$ - дисперсия признака *x*

Ввиду того, что $\mathrm{cov}(x,y) = \overline{yx} - \overline{y}\,\overline{x}$,

а $\sigma_x{}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

Получим следующую формулу оценки параметра a_1:

$$a_1 = \frac{\overline{yx} - \overline{y}\,\overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

Параметр a_1 называется коэффициентом регрессии. Его величина называет среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу. Так, если в функции издержек $\hat{y}_x$ = 3000+2х (*y*-издержки (тыс.руб.), *x*-количество единиц продукции), то следовательно с увеличением объёма продукции (*x*) на 1 единицу издержки производства возрастают в среднем на 2 тыс.руб.

Возможности четкой экономической интерпретации коэффициента регрессии сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в эконометрических исследованиях.

Формально a_0 - значение у при х =0. если признак-фактор х не имеет и не может иметь нулевого значения, то вышеуказанная трактовка свободного члена a_0 не имеет смысла. Параметр a_0 может не иметь экономического содержания. Попытки экономически интерпретировать параметр a_0 могут привести к абсурду, особенно при a_0 <0. Интерпретировать можно лишь знак при параметре a_0. Если a_0 >0, то относительное изменение результата происходит медленнее, чем изменение фактора. Иными словами, вариация результата меньше вариации фактора – коэффициент вариации по фактору х выше коэффициент вариации для результата у, $V_x > V_y$

4.Примеры систем нормальных уравнений для основных видов производственных функций.

Рассмотрим несколько примеров системы нормальных уравнений для случая линейной зависимости.

Для линейной регрессии $\hat{y}_x = a + bx$ или $y = a + bx + \varepsilon$

получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a_0 и a_1.

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_i = \sum y_i \\ a_0\sum x_i + a_1\sum \mathrm{x_i}^2 = \sum y_i x_i \end{cases}$$

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum y \cdot x = a \cdot \sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum y \cdot x^2 = a \cdot \sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{cases}$$

Решение Его возможно методом определений:

$$a = \frac{\nabla a}{\nabla},\ b = \frac{\nabla b}{\nabla},\ c = \frac{\nabla c}{\nabla},$$

Где ∇ – определитель системы:

∇a, ∇b, ∇c частные определители для каждого из параметров

Если же исходные данные не обнаруживают изменения направленности связи, то параметры параболы второго порядка становятся трудно интерпретируемыми, а форма связи часто заменяется другими нелинейными моделями.

При $b > 0$ и $c < 0$ кривая симметрична относительно высшей точки, т.е. точки перелома кривой, изменяющей направление связи, а именно рост на падение. Такого рода функцию можно наблюдать в экономике труда при изучении зависимости заработной платы работников физического труда от возраста – с увеличением возраста повышается заработная плата ввиду одновременного увеличения опыта и повышения квалификации работника. Однако с определенного возраста ввиду старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работника. Если параболическая форма связи демонстрирует сначала рост, а затем снижение уровня знаний результативного признака, то определяется значение фактора, при котором достигается максимум. Так, предполагая, что потребление товара А(единицу) в зависимости от уровня дохода семьи (тыс. руб.) характеризуется уравнением вида $y_x^\Lambda = 5 + b \cdot x - x^2$.Приравнивая к нулю первую производную $y_x^\Lambda = b - 2 \cdot x = 0$ найдем величину дохода при которых потребление максимальные, т.е. при $x = 3$ тыс.руб.

При $b < 0$ и $c > 0$ парабола второго порядка симметрична относительно своей низшей точки, что позволяет определить минимум функции в точке, меняющей направление связи, т.е. снижение на рост. Так, если в зависимости от объема выпуска продукции затраты на производство характеризуется уравнением $\hat{y}_x = 1200 - 60 \cdot x + 2 \cdot x^2$, то наименьшие затраты достигаются при выпуске продукции $x = 15$ ед. т.е. $-60 + 2 \cdot 2x = 0$

Для равносторонней гиперболы виды $\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \varepsilon$, заменив $\frac{1}{x}$ на z, получим линейное уравнение регрессии $y = a_0 + a_1 z + \varepsilon$, оценка параметров которого может быть дана методом наименьших квадратов. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a_0 + a_1 \sum \frac{1}{x} \\ \sum \frac{y}{x} = a_0 \cdot \sum \frac{1}{x} + a_1 \sum \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

При $a_1 > 0$, имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой, т.е. минимальным предельным значением y, оценкой которого служит параметр a_0.

5. Применение линейных моделей регрессии.

Задача. Предположим по группе предприятий, выпускающих один и тот же вид продукции рассматривается функция издержек $y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$. Информация, необходимая для расчета оценок параметров a и b представлена в таблице

№ предприятия	Выпуск продукции, тыс. ед. (x)	Затраты на производство млн.руб.(y)	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$

1	1	30	30	1	900	31,1
2	2	70	140	4	4900	67,9
3	4	150	600	16	22500	141,6
4	3	100	300	9	10000	104,7
5	5	170	850	25	28900	178,4
6	3	100	300	9	10000	104,7
7	4	150	600	16	22500	141,6
Итого	22	770	2820	80	9970	770,0

Система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 7a_0 + 22a_1 = 770 \\ 22a_0 + 80a_1 = 2820 \end{cases}$$

Решая, получим: a_0 = -5,79, a_1 =*36*,84.

Запишем уравнение регрессии:

y=-5,79+36,84x

Задача. По семи территориям Уральского района за 199Х г. известны значения двух признаков.

Район	Расходы на покупку продовольственных товаров в общих расходах ,% , у	Среднедневная заработная плата одного работающего, руб., х
Удмуртская респ.	68,8	45,1
Свердловская обл.	61,2	59,0
Башкортостан	59,9	57,2
Челябинская обл.	56,7	61,8
Пермская обл.	55,0	58,8
Курганская обл.	54,3	47,2
Оренбургская обл.	49,3	55,2

Требуется:

Построить регрессионное уравнение гиперболы.

Решение.

1. Уравнение равносторонней гиперболы $y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$ можно привести к линейному виду, сделав замену: $z = \frac{1}{x}$. Тогда получим следующее линейное уравнение $y = a_0 + a_1 \cdot z$

Для расчетов используем данные следующей таблицы:

	y	$z = \frac{1}{x}$	yz	z^2	y^2
1	68,8	0,0222	1,5255	0,000492	4733,44
2	61,2	0,0169	1,0373	0,000287	3745,44
3	59,9	0,0175	1,0472	0,000306	3588,01
4	56,7	0,0162	0,9175	0,000262	3214,89
5	55,0	0,0170	0,9354	0,000289	3025,00
6	54,3	0,0212	1,1504	0,000449	2948,49
7	49,3	0,0181	0,8931	0,000328	2430,49
Итого	405,2	0,1291	7,0564	0,002413	23685,76

Значения параметров регрессии a_0 и a_1, вычислим по формулам:

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \cdot \overline{z} \quad , \quad a_1 = \frac{\overline{y \cdot z} - \overline{y} \cdot \overline{z}}{\overline{z^2} - \overline{z}^2} \quad .$$

$$a_1 = \frac{1{,}0723 - 57{,}89 \cdot 0{,}0184}{0{,}000345 - 0{,}0184^2} \approx 1051{,}4 \quad ,$$

$$a_0 = 57{,}89 - 1051{,}4 \cdot 0{,}0184 = 38{,}5 \quad .$$

Получено уравнение $\hat{y}_x = 38{,}5 + 1051{,}4 \cdot \frac{1}{x}$

Контрольные вопросы.

1) Что может явиться причиной неоднозначности зависимости результативного показателя (например, урожайности пшеницы) от какого - либо фактора (например, качества земли)?
2) Привести пример и дать общую характеристику функциональной зависимости результативного показателя от факторного показателя.
3) Объясните смысл понятия «корреляционная связь признаков».

4) Назвать две основные задачи корреляционного анализа и пути их решения.
5) Каким образом следует выбирать класс функций при определении сглаживающей зависимости результативного показателя от производственных факторов?
6) Дать общую характеристику понятия «средняя квадратичная регрессия».
7) Сформулировать принцип наименьших квадратов для общего случая зависимости результативного показателя от производственных факторов.
8) Каким образом на основании принципа наименьших квадратов получают систему нормальных уравнений в дифференциальной форме?
9) Что такое линейная регрессия?
10) Что такое параболическая регрессия?
11) Что такое гиперболическая регрессия?
12) Каким образом осуществляется контроль вычисления коэффициентов нормальных уравнений?
13) В чем суть модификации метода Гаусса с выбором главного элемента?
14) Дать формализованную запись общего представления линейной модели регрессии.
15) Записать линейную модель регрессии для случая трехфакторной производственной функции Кобба- Дугласа.
16) Записать линейную модель регрессии для случая двухфакторной производственной функции из класса кинетической зависимости.
17) Записать выражение для принципа наименьших квадратов в случае использования линейной модели регрессии.
18) Дать матричное представление системы нормальных уравнений в случае использования линейной модели регрессии.
19) Вывести, используя матричное преобразование, систему нормальных уравнений для случая трехфакторной зависимости вида Кобба- Дугласа.
20) Привести расчет коэффициентов системы нормальных уравнений для определения линейной регрессии по данным из следующей таблицы (x- производственный фактор ; y- результативный показатель) :

№ набл.	**x**	**y**
1.	32	24

2.	39	27
3.	29	23
4.	28	24
5.	40	29
6.	27	25
7.	49	32
8.	50	34
9.	29	25
10.	36	30
11.	32	28
12.	55	37
13.	34	27
14.	27	24
15.	36	26
16.	44	32

Нарисовать график полученной линейной регрессии, а также изобразить точками результаты наблюдений, приведенные в таблице.

21) Привести расчет коэффициентов системы нормальных уравнений для определения гиперболической регрессии по данным из следующей таблицы (x- производственный фактор ; y- результативный показатель):

№ набл.	**x**	**y**
1.	0,15	35
2.	0,25	28
3.	0,35	22
4.	0,45	15
5.	0,55	12
6.	0,7	12
7.	0,9	10
8.	1,1	8
9.	1,2	7
10.	1,4	7,5
11.	1,6	7
12.	1,8	6,5
13.	2	6
14.	2,2	5
15.	2,4	6
16.	2,6	4,5

Нарисовать график полученной гиперболической регрессии, а также изобразить точками результаты наблюдений, приведенные в таблице.

Тема 4: Оценка производственных функций с использованием методов корреляционно-регрессионного анализа.

1. Понятие и вычисление коэффициентов корреляции.
2. Оценка погрешностей определения коэффициентов корреляции.
3. Оценка значимости представления производственной функции. получаемого по результатам выборочных наблюдений.
4. Примеры проведения корреляционного анализа.

1.Понятие и вычисление коэффициентов корреляции.

О практической ценности производственных функций можно судить только после оценки полученных результатов. Такая оценка производится путем вычисления Коэффициентов корреляции , корреляционных отношений и различных статистических величин, характеризующих тесноту связи результативного и факторного показателей.

Регрессионную зависимость, используемую в качестве функционального представления производственной функции, можно построить практически по любой выборке. В то же время, как отмечалось, функциональные, т.е. однозначное представление- это идеализация. В действительности зависимости неоднозначны, имеют статистическую природу, иными словами, связь производственной функции с производными факторами- не абсолютно тесная. В связи с этим наряду с функциональным представлением производственной функции полезно ввести ряд показателей, характеризующих реальную тесноту связи результата с факторами.

В качестве одной из указанных характеристик может использоваться **коэффициент корреляции,** показывающий, на сколько зависимость у от $x_1, x_2, ..., x_k$ выраженная выборкой, близка к линейной.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Существуют разные модификации формулы линейного коэффициента корреляции. Некоторые из них приведены ниже

$$r_{xy} = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Как известно, линейный коэффициент корреляции находится в границах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Если коэффициент регрессии a_1>0 то $0 \le r_{xy} \le 1$, и наоборот при a_1<0, $-1 \le r_{xy} \le 0$.

Следует иметь в виду, что величина линейного коэффициента корреляции оценивает тесноту связи рассматриваемых признаков в ее линейной форме. Поэтому близость абсолютной величины линейного коэффициента корреляции к нулю еще не означает отсутствие связи между признаками. При иной специфики модели связь между признаками может оказаться достаточно тесной.

Для оценки качества подбора линейной функции рассчитывается квадрат линейного коэффициента корреляции $r_{xy}^{\;2}$ называемый **коэффициентом детерминации**. Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативного признака y объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака $r_{xy}^{\;2} = \frac{\sigma_y^{\;2}{}_{объясн}}{\sigma_y^{\;2}{}_{общ}}$.

Соответственно величина $1-r^2$ характеризует долю дисперсии y, вызванную влиянием остальных неучтенных в модели факторов.

В геометрической интерпретации коэффициент корреляция показывает, на сколько геометрическое место точек, определяемое выборкой, близко к прямой линии.

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейном случае, дополняется показателем корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}}.$$

Величина данного показателя находится в границах $0 \le R \le 1$, чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков. Это говорит об эффективности найденных коэффициентов регрессии.

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации. Для нелинейных связей эту величину обычно называют индексом детерминации.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m},$$

где n – число наблюдений, m – число параметров при переменных x.

Фактические значения результативного признака отличаются от теоретических,рассчитанных по уравнению регрессии, т.е. y и $\hat{y}_x$. Чем меньше эти отличия, тем ближе теоретические значения подходят к эмпирическим данным, лучше качество модели. Чтобы иметь общее суждение о качестве модели из относительных отклонений по каждому наблюдению, определяют среднюю ошибку аппроксимации как среднюю арифметическую простую:

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum \left| \frac{(y - \hat{y}_x)}{y} \right| \cdot 100\% .$$

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы $r_{XiXj} = (x_i \neq x_j)$ были бы равны нулю.

Так для включающего три объясняющих переменных уравнения:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_p x_p + \varepsilon$$

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель равный единице.

$$Det \quad |R| = \begin{vmatrix} r_{X1X1} & r_{X2X1} & r_{X3X1} \\ r_{X1X2} & r_{X2X2} & r_{X3X2} \\ r_{X1X3} & r_{X2X3} & r_{X3X3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Т.к. $r_{X1X1} = r_{X2X2} = r_{X3X3} = 1$ и $r_{X1X2} = r_{X1X3} = r_{X2X3} = 0$

Если же наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость то определитель такой матрицы равен нулю

$$Det \quad |R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результат множественной регрессии. И наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

2.Оценка погрешностей определения коэффициентов корреляции.

Коэффициенты корреляции рассчитываются по выборкам и, соответственно, имеют статистический характер. Фактически, они являются функциями случайных величин у, $x_1, x_2,..., x_k$.В связи с этим правомерен вопрос о достоверности расчета коэффициентов по приведенным соотношениям. Ниже приводятся ряд формул, позволяющих оценить указанную достоверность. Формулы получены методами математической статистики на основе ряда весьма существенных допущений, основным из которых является предположение о нормальности частных распределений величин у, $x_1, x_2,..., x_k$. Не смотря на грубость такого допущения, в большинстве реальных случаев, получаемые на его основе выводы относительно достоверности выборочных оценок коэффициентов корреляции, приемлемы с практической точки зрения.

Для линейной парной регрессии.

$$\sigma_x{}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

$$\sigma_y{}^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$$

Для нелинейной регрессии

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y - \hat{y}_x\right)^2$$ - остаточная дисперсия,

а $$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y - \bar{y}_x\right)^2$$ - общая дисперсия результативного признака.

Расчет индекса множественной корреляции предполагает определение уравнения множественной регрессии и на его основе остаточной дисперсии:

$$\delta^2{}_{ост} = \sum(y - \bar{y}_{x_1 x_2 /// x_p})^2 / n$$

3.Оценка значимости представления производственной функции.

После того как найдено уравнение регрессии, проводится оценка значимости как уравнение в целом, так и отдельных его параметров.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом дается с помощью F-критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю, т.е. a_1 =0, и, следовательно, фактор х не оказывает влияние на результат у.

Непосредственному расчету F-критерия предшествует анализ дисперсии. Центральное место в нем занимает разложение общей суммы квадратов отклонений переменной у от среднего значения $\bar{y}$ на две части – «объясненную» и «необъясненную»:

$$\sum(y - \bar{y})^2 \quad = \quad \sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 \quad + \quad \sum(y - \hat{y}_x)^2$$

Общая сумма сумма квадратов остаточная сумма

квадратов = отклонений + квадратов
отклонений объясненная отклонений

Общая сумма квадратов отклонений индивидуальных значений $\bar{y}$ результативного признака у от среднего значения вызвана влиянием множества причин на две группы: изучаемый фактор х и прочие факторы. Если фактор не оказывает влияние на результат, линия регрессии на графике параллельно оси ох и $\bar{y} = \hat{y}_x$.Тогда вся дисперсия результативного признака обусловлена воздействием прочих факторов и общая сумма квадратов отклонений совпадает с остаточной. Если же прочие факторы не влияют на результат, то у связан с х функционально и остаточная сумма квадратов равна нулю. В этом случае сумма квадратов отклонений, объясненная регрессий, совпадает с общей суммой квадратов.

Поскольку не все точки поля корреляции лежат на линии регрессии, то всегда имеет место их разброс как обусловленный влиянием фактора х, т.е. регрессий у по х, так и вызванный действием прочих причин (необъясненная вариация). Пригодность линии регрессии для прогноза зависит от того, какая часть общей вариации признака у приходится на объясненную вариацию, очевидно что если сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией, будут больше остаточной суммы квадратов, то уравнение регрессии статистические значимо и фактор х оказывает существенное влияние на результат у. Это равносильно тому, что коэффициент детерминации r_{xy}^2 будет приближаться к единице.

Любая сумма квадратов отклонений связана с числом степеней свободы, т.е. с числом свободы независимого варьируемого признака. Число степеней свободы связано с числом единиц совокупности n и с числом определяемых по ней констант. Применительно к исследуемой проблеме число степеней свободы должно показать, сколько независимых отклонений из n возможных $[(y_1 - \bar{y}), (y_2 - \bar{y}), ..., (y_n - \bar{y})]$.Требуется для образования данной суммы квадратов. Так, для общей суммы квадратов $\sum (y - \bar{y})^2$ требуется (n-1) независимых отклонений, что по совокупности из n единиц после расчета среднего уровня свободно варьирует лишь (n-1) число отклонений. Например: имеете ряд значений у:1,2,3,4,5. Среднее из них равно 3, и тогда n отклонений от среднего составят:-2,-1,0,1,2. Так как $\sum (y - \bar{y}) = 0$,то свободно варьируют лишь четыре отклонения, а пятое может определено, если предыдущие четыре известны.

При расчете объясненной или факторной суммы квадратов $\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2$ используется теоретически (расчетные) значения результативного признака $\hat{y}_x$. Найденные по линии регрессии $\hat{y}_x = a_0 + a_1 x$

В линейной регрессии $\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 = a_1^2 \sum (x - \bar{x})^2$.В этом нетрудно убедится, обратившись к формуле линейного коэффициента корреляции.

$$r_{xy} = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad .$$

Из этой формулы видно, что

$$r_{xy}^2 = a_1^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad ,$$

где σ_y^2 - общая дисперсия признака у;

$a_1^2 \sigma_x^2$ - дисперсия признака у, обусловленная фактором х.

Соответственно , сумма квадратов отклонений, обусловленная линейной регрессией составит:

$$\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 = a_1^2 \cdot \sum(x - \vec{x})^2 \quad .$$

Поскольку при заданном объеме наблюдений по х и у факторная сумма квадратов при линейной регрессии зависит только от одной компоненты коэффициента регрессии b , то данная сумма квадратов имеет одну степень свободы. К тому же выводу придем, если рассмотреть содержательную сторону расчетного признака у , т.е. $\hat{y}_x$. Величина $\hat{y}_x$ определяется по уравнениям линейной регрессии: $\hat{y}_x = a_0 + a_1 x$ Параметр a_0 можно определить как $a = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}.$ Подставив выражение параметра a_0 в линейную модель, получим:

$$\hat{y}_x = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x} + a_1 \cdot x = \bar{y} - a_1 \cdot (x - \bar{x}).$$

Отсюда видно, что при заданном наборе переменных х и у расчетное значение $\hat{y}_x$ является в линейной регрессии функцией только одного параметра – коэффициента регрессии. Соответственно и факторная сумма квадратов отклонений имеет число степеней свободы, равное 1.

Существует равенство между числом степеней свободы общей, факторной и остаточной суммой квадратов. Число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессии составляет n-2.Число степеней свободы для общей суммы квадратов определяется числом единиц, и поскольку мы используем среднюю вычисленную по данным выборки то теряем одну степень свободы, т.е. $Df_{общ}$=n-1

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим средний квадрат отклонений, или, что то же самое, дисперсию на одну степень свободы D.

$$Д\ общ = \frac{\sum(y - \bar{y})^2}{n - 1}$$

Д факт = $\dfrac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{1}$

Д ост = $\dfrac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{n-2}$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы получим величину F-отношения (F-критерия)

$F = \dfrac{Дфак}{Дост}$

где F-критерий для проверки нулевой гипотезы H_o: $Д_{факт} = Д_{ост}$

Если нулевая гипотеза справедлива, то факторная и остаточная дисперсии не отличаются друг от друга. Для Но необходимо опровержение, чтобы факторная дисперсия превышала остаточную в несколько раз. Английским статистиком Снедекором разработаны таблицы критических значений F-отношений при разных уровнях существенности нулевой гипотезы и различном числе степеней свободы.

Табличное значение F-критерия- это максимальная величина отношения дисперсий, которая может иметь место при случайном их расхождении для данного уровня вероятности наличие нулевой гипотезы. Вычисленное значение F-отношения признается достоверным (отмеченным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза об отсутствии связи признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи: $F_{факт} > F_{таб}$, H_o- отклоняется.

Если же величина окажется меньше табличного Fфакт< Fтаб, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например, $\alpha=0{,}05$) и она не может быть отклонена без серьезного риска сделать неправильный вывод о наличии связи. В этом случае уравнение регрессии считается статистически не значимым. Но не отклоняется.

В линейной регрессии обычно оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка m_{a_0}

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле $m_{a_1} = \sqrt{\dfrac{\sum(y - \hat{y}_x)^2/(n-2)}{\sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{\sum(x-\bar{x})^2}}$

Где , S^2 - остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Величина стандартной ошибки совместно с t- распределением Стьюдента при n-2 степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительных интервалов.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибки, т.е. определяется фактическое значение t-критерия Стьюдента: $t_{a_1} = \frac{a_1}{m_{a_1}}$ которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α.И числе степеней свободы(n-2).

Стандартная ошибка параметра а определяется по формуле: $m_{a0} = \sqrt{\frac{\sum (y-\hat{y}_x)^2}{n-2} \cdot \frac{\sum x^2}{n\sum (x-\bar{x})^2}} = \sqrt{S^2 \cdot \frac{\sum x^2}{n\sum (x-\bar{x})^2}}$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии:

Вычисляется t-критерии: $t_{a_0} = \frac{a_0}{m_{a_0}}$ Его величина сравнивается с табличным значением при df =n-2 степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляций на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

Фактическое значение t-критерия Стьюдента определяется как

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}$$

Данная формула свидетельствует, что в парной линейной регрессии $t_r^2 = F$,что как уже указывалось $F = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-2)$

Кроме того $r_{a_1}^2 = F$.Следовательно, $t_r^2 = t_{a_1}^2$

Таким образом, проверка гипотез о значимости коэффициентов регрессии и корреляции равносильна проверке гипотезы о существенности линейного уравнения регрессии.

4. Примеры проведения корреляционного анализа.

Рассмотрим группу предприятий, выпускающих один и тот же вид продукции. Информация, необходимая для расчетов представлена в таблице

№ предприятия	Выпуск продукции тыс.ед.(х)	Затраты на производство млн. руб.(у)

1	1	30
2	2	70
3	4	150
4	3	100
5	5	170
6	3	100
7	4	150

Требуется:

1.Построить функцию издержек $y = a + bx + \varepsilon$ (линейное уравнение парной регрессии y от x). Сделать вывод о влиянии фактора x на y.

2.Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и детерминации.

3.Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции.

4.Выполнить прогноз затрат на производство y при прогнозируемом значении выпуска продукции x, равном 5 тыс. ед.

5.Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.

Решение.

Для построения уравнения регрессии необходимо оценить ее параметры. Для оценки параметров линейной регрессии применяется метод наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получать такие оценки параметров a и b, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака (y) от расчетных (теоретических) значений $\hat{y}_x$ минимальна.

После применения данного метода и соответствующих преобразований, получили следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a и b.

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i . \end{cases}$$

Для составления системы произведем расчеты в таблице

№ предприятия	Выпуск продукции	Затраты на производство	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$

	тыс. ед.(x)	млн. руб.(y)				
1 2 3 4 5 6 7	1 2 4 3 5 3 4	30 70 150 100 170 100 150	30 140 600 300 850 300 600	1 4 16 9 25 9 16	900 4900 22500 10000 28900 10000 22500	31,1 67,9 141,6 104,7 178,4 104,7 141,6
Итого	22	770	2820	80	9970	770,0

Система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 7a + 22b = 770\ , \\ 22a + 80b = 2820. \end{cases}$$

Решив систему, получим: a = -5,79, b=36,84.

Запишем уравнение регрессии:

$$\hat{y}_x = -5{,}79 + 36{,}84 \cdot x$$

Итак, получили, что в функции издержек коэффициент регрессии равен 36,84.

Это означает, что с увеличением объема продукции на 1 тыс. ед. издержки производства возрастут в среднем на 36,84 млн.руб.

2.Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Существуют разные модификации формулы линейного коэффициента корреляции. Воспользуемся следующей:

$$r_{yx} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Как известно, линейный коэффициент корреляции находится в границах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Если коэффициент регрессии b>0 то $0 \le r_{xy} \le 1$ и наоборот при b<0, $-1 \le r_{xy} \le 0$.

Итак, получили, что величина линейного коэффициента корреляции составила 0,991, что достаточно близко к 1 и означает наличие очень тесной зависимости затрат на производство от величины объема выпущенной продукции.

Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативного признака у объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака $r_{xy}^{2} = \frac{\sigma_{y}^{2}{}_{объясн}}{\sigma_{y}^{2}{}_{общ}}$.

Соответственно величина $1 - r^2$ характеризует долю дисперсии у, вызванную влиянием остальных неучтенных в модели факторов.

В нашем примере $r^2 = 0,982$.

Следовательно, уравнением регрессии объясняется 98,2% дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 1,8% ее дисперсии (т.е. остаточная дисперсия).

3. После того как найдено уравнение регрессии, проводится оценка значимости как уравнение в целом, так и отдельных его параметров.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом дается с помощью F-критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю, т.е. b=0, и, следовательно, фактор х не оказывает влияние на результат у.

Непосредственному расчету F-критерия предшествует анализ дисперсии. Центральное место в нем занимает разложение общей суммы квадратов отклонений переменной у от среднего значения $\bar{y}$ на две части – «объясненную» и «необъясненную»:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y}_x)^2$$

Общая сумма квадратов отклонений	=	объясненная сумма квадратов отклонений	+	остаточная сумма квадратов отклонений

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим средний квадрат отклонений, или, что то же самое, дисперсию на одну степень свободы D.

Добщ $= \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}$

Дфакт $= \frac{\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2}{1}$

Дост $= \dfrac{\sum (y-\hat{y}_x)^2}{n-2}$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы получим величину F-отношения (F-критерия).

F= $\dfrac{Д_{факт}}{Д_{ост}}$

Где F-критерий для проверки нулевой гипотезы H0: Дфакт = Дост

Вычисленное значение F-отношения признается достоверным (отмеченным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза от отсутствии связи признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи: Fфакт> Fтаб. Но- отклоняется.

Если же величина окажется меньше табличного Fфакт< Fтаб, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например,0,05) и она не может быть отклонена без серьезного риска сделать неправильный вывод о наличии связи. Этом случае уравнение регрессии считается статистически не значимым. Но не отклоняется в рассмотренном примере;

$$\sum (y-\bar{y})^2 = \sum \overline{y^2} - n\bar{y}^2 = 99700 - 7\cdot 110^2 = 15000$$

Общая сумма квадратов;

$$\sum (\hat{y}_x-\bar{y})^2 = b^2 \sum (x-\bar{x})^2 = 36.84^2\cdot(80-7\cdot(22/7)^2) = 14735$$

Факториальная сумма квадратов;

$\sum (y-\hat{y}_x)$ =15000-14735=235 - остаточная сумма квадратов;

Дфакт =14735

Дост =265:5=53

F=14735/53=278

$F_{\alpha=0,05} = 6,61$; $F_{\alpha=0,01} = 16,26$

Поскольку Fфакт > Fтабл , как при 1%-ом так при 5%-ом уровне значимости уравнения регрессии (связь доказана).

В линейной регрессии обычно оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка m_a

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y-\hat{y}_x)^2/(n-2)}{\sum (x-\bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2}{\sum (x-\bar{x})^2}}$$

Где S^2 - остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Для нашего примера величина стандартной ошибки коэффициента регрессии составила:

$$m_b = \sqrt{\frac{53}{10.857}} = 2.21$$

Величина стандартной ошибки совместно с t- распределением Стьюдента при n-2 степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительных интервалов.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибки, т.е. определяется фактическое значение t-критерия Стьюдента: $t_b = \dfrac{b}{m_b}$, которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α и числе степеней свободы(n-2).

В рассматриваемом примере фактическое значение t-критерия для коэффициента регрессии составило: $t_b = \dfrac{36.84}{2,21} = 16.67$. Этот же результат получим, извлекая квадратный корень из найденного ранее F-критерия, т.е. $r_b = \sqrt{F} = \sqrt{278} = 16.67$.

При $\alpha = 0,05$ (для двустороннего критерия) и число степеней свободы табличное значение $t_b = 2.57$, так как фактическое значение t-критерия превышает табличное, то следовательно, гипотезу о несущественности коэффициента регрессии можно отклонить.

Доверительный интервал для коэффициента регрессии в примере составят $36,84 \pm 2,57 \cdot 2.21 = 36,84 \pm 5,68$

4.Величина коэффициента детерминации служит одним из критериев оценки качества линейной модели. Чем больше доля объясненной вариации, тем соответственно меньше роль прочих факторов, и, следовательно, линейная модель хорошо аппроксимирует исходные данные и ею можно воспользоваться для прогноза значений результативного признака.

Так полагая, что объем продукции предприятия может составить 5 тыс.ед. прогнозное значение для издержек производства окажется равным

$$\hat{y}_x = -5,79 + 36,84 \cdot 5 = 178,4 \text{ ìëí.ðóá.}$$

5. Доверительный интервал для коэффициента регрессии в примере составят $36{,}84 \pm 2{,}57 \cdot 2.21 = 36{,}84 \pm 5{,}68$

Контрольные вопросы.

1) Что характеризует коэффициент корреляции?
2) Записать выражение для расчета выборочного значения коэффициента парной корреляции.
3) Что такое коэффициент множественной корреляции? Приведите общее выражение для расчета этого коэффициента. Каков диапазон его возможных значений?
4) Дать определение корреляционного отношения. Что оно характеризует? В чем заключается его отличие от коэффициента корреляции?
5) Привести соотношения между корреляционным соотношением и коэффициентами корреляции (парной и множественной связи) для случая линейной регрессии.
6) Какими показателями характеризуется степень влияния производственных факторов на результативный показатель?
7) Привести формулу расчета параметров доверительного интервала для коэффициента корреляции из генеральной совокупности при больших объемах выборки. Какое допущение лежит в основе формулы?
8) Можно ли определить достаточный объем выборки независимо от оцениваемой характеристики случайной величины?
9) Привести формулы расчета необходимого объёма выборки, если оценивается среднее значение наблюдаемой случайной величины.
10) Что характеризует коэффициент детерминации?

Тема 5: Экономические характеристики производственных функций и их использование в землеустройстве.

1. Понятие и определение экономических характеристик производственных функций.
2. Примеры расчета экономических характеристик производственных функций.

1. Понятие и определение экономических характеристик производственных функций.

Производственные функции как результат обобщения опыта, прямых наблюдений и экспериментов в землеустроительной практике служат концентрированным источником исходной информации при решении разных задач. С методической точки зрения можно выделить три основных класса задач, в которых целесообразно использование производственных функций, в том числе построенных на основе статистического анализа выборочных наблюдений:

1. класс задач прогнозирования, в которых граничные условия либо вообще не задаются, либо играют чисто номинальную роль-определяют область допустимых значений аргументов функции регрессии ;
2. класс оптимизационных задач, в которых граничные условия играют активную роль факторов, формирующих облик оптимального решения;
3. класс задач экономического анализа состояния и использования земель и других процессов при решении различных землеустроительных вопросов.

На первый взгляд, к самостоятельному классу относятся оптимизационные задачи, в которых оптимальное решение находится по условию достижения экстремума производственной функции внутри области допустимых значений аргументов $x_1, x_2, ..., x_k$, однако в действительности, в реально сложных задачах факт нахождения экстремума внутри области допустимых значений устанавливается после его отыскания и, следовательно, такие задачи-частный случай задач второго из названных классов.

В приводимых ниже определениях предполагается заданной функциональная зависимость результата производства от производственных факторов- $y(x_1, x_2, ..., x_k)$ причем эта функция имеет первые производные по всем аргументам. Рассматриваемые характеристики имеют по преимуществу экономический смысл и, соответственно, основная область их применения - анализ влияния различных факторов на эффективность производства.

Дополнительный продукт фактора x_i (или иначе **предельная производительность**) определяется производной:

$$D_i = \frac{\partial y}{\partial x_i},$$

взятой при фиксации всех остальных факторов.

По смыслу производной D_i характеризует скорость (темп) изменения показателя эффективности «в данной точке» при изменении i-го фактора и заданных значений других производственных факторов.

Средняя производительность :

$$\overline{\ddot{I}}_i = \frac{y}{x_i}$$

Отражает средний темп изменения показателя эффективности при увеличении i-го фактора в диапазоне от нуля до заданного значения x_i.

Если под у понимать не показатель эффективности производства, а производственные затраты на выпуск продукции, то рассматриваемое отношение $\overline{\text{Ï}}_i$ следует интерпретировать как себестоимость единицы продукции.

Коэффициент эластичности:

$$E_i = (\frac{\partial y}{y})/(\frac{\partial x_i}{x_i})$$

характеризует относительное изменение результата производства на единицу относительного изменения i-го производственного фактора.

Коэффициент эластичности численно равен отношению дополнительного продукта фактора (предельной производительности) к средней производительности:

$$E_i = (\frac{\partial y}{y})/(\frac{\partial x_i}{x_i}) = \frac{D_i}{\overline{\text{Ï}}_i}$$

Предельная норма заменяемой j-го фактора i-м. Данная характеристика может вводиться в случае зависимости результата производства от двух и более факторов.

Поскольку коэффициенты эластичности представляют экономический интерес, а виды моделей не ограничиваются только степенной функцией, приведем формулы расчета коэффициентов эластичности для наиболее распространенных типов уравнений регрессии.

Вид функции, y	Первая производная, y'_x	Коэффициент эластичности, $Э = y'_x \cdot \frac{x}{y}$
Линейная $y = a + b \cdot x + \varepsilon$	b	$Э = \frac{b \cdot x}{a + b \cdot x}$
Парабола второго порядка $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2 \cdot c \cdot x$	$Э = \frac{(b + 2 \cdot c \cdot x) \cdot x}{a + b \cdot x + c \cdot x^2}$
Гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$Э = \frac{-b}{a \cdot x + b}$
Показательная $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$\ln b \cdot a \cdot b^x$	$Э = x \cdot \ln b$
Степенная $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	$Э = b$

Полулогарифмическая $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$Э = \frac{b}{a + b \cdot \ln x}$
Логистическая $y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon}}$	$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-cx}}{\left(1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon}\right)^2}$	$Э = \frac{c \cdot x}{\frac{1}{b} \cdot e^{cx} + 1}$
Обратная $y = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$\frac{-b}{(a + b \cdot x)^2}$	$Э = \frac{-bx}{a + b \cdot x}$

2. Примеры расчета экономических характеристик производственных функций.

По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс.руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1(% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2(%).

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	3,8	11,0	11	10,0	6,8	21,0
2	7,0	3,8	12,0	12	11,0	7,4	23,0
3	7,0	3,9	16,0	13	11,0	7,8	24,0
4	7,0	4,1	17,0	14	12,0	7,5	26,0
5	7,0	4,6	18,0	15	12,0	7,9	28,0
6	8,0	4,5	18,0	16	12,0	8,1	30,0
7	8,0	5,3	19,0	17	13,0	8,4	31,0
8	9,0	5,5	20,0	18	13,0	8,7	32,0
9	9,0	6,1	20,0	19	13,0	9,5	33,0
10	10,0	6,8	21,0	20	14,0	9,7	35,0

Требуется:

Построить уравнение множественной регрессии в стандартизованной форме. Сравнить стандартизованные коэффициенты β_1 и β_2 . Сделать вывод.

Решение.

1.Линейная модель множественной регрессии (уравнение - двухфакторное) имеет следующий вид

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$$

Поострим уравнение в стандартизованном масштабе

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$$

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для этого применим МНК(метод наименьших квадратов). МНК приводит к решению системы нормальных уравнений. В случае линейного двухфакторного уравнения регрессии система имеет следующий вид

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_1x_2}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2x_1} + \beta_2. \end{cases}$$

Решить данную систему можно методом определителей. Для вычисления β-коэффициентов получаем следующие формулы

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2},$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2},$$

где $r_{yx_1}, r_{yx_2}, r_{x_1x_2}$ - коэффициенты парной корреляция .

Рассчитаем их по формулам

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{yx_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_y}, \quad r_{yx_2} = \frac{\overline{yx_2} - \bar{y} \cdot \bar{x}_2}{\sigma_{x_2} \cdot \sigma_y}, \quad r_{x_1x_2} = \frac{\overline{x_1x_2} - \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}},$$

где σ_{x_1}, σ_{x_2}, σ_y - среднеквадратические отклонения , которые рассчитываются по формулам

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2, \quad \sigma_{x_1}^2 = \overline{x_1^2} - \bar{x}_1^2, \quad \sigma_{x_2}^2 = \overline{x_2^2} - \bar{x}_2^2.$$

Построим расчетную таблицу

И так, получим

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{46{,}04 - 6{,}51^2} = \sqrt{3{,}6599} = 1{,}913087$$

№	y	x_1	x_2	y x_1	y x_2	x_2 x_1	y^2	x_1^2	x_2^2
1	7	3,8	11	26,6	77	41,8	49	14,44	121
2	7	3,8	12	26,6	84	45,6	49	14,44	144
3	7	3,9	16	27,3	112	62,4	49	15,21	256
4	7	4,1	17	28,7	119	69,7	49	16,81	289
5	7	4,6	18	32,2	126	82,8	49	21,16	324
6	8	4,5	18	36	144	81	64	20,25	324
7	8	5,3	19	42,4	152	100,7	64	28,09	361
8	9	5,5	20	49,5	180	110	81	30,25	400
9	9	6,1	20	54,9	180	122	81	37,21	400
10	10	6,8	21	68	210	142,8	100	46,24	441
11	10	6,8	21	68	210	142,8	100	46,24	441
12	11	7,4	23	81,4	253	170,2	121	54,76	529
13	11	7,8	24	85,8	264	187,2	121	60,84	576
14	12	7,5	26	90	312	195	144	56,25	676
15	12	7,9	28	94,8	336	221,2	144	62,41	784
16	12	8,1	30	97,2	360	243	144	65,61	900
17	13	8,4	31	109,2	403	260,4	169	70,56	961
18	13	8,7	32	113,1	416	278,4	169	75,69	1024
19	13	9,5	33	123,5	429	313,5	169	90,25	1089
20	14	9,7	35	135,8	490	339,5	196	94,09	1225
Σ	200	130,2	455	1391	4857	3210	2112	920,8	11265
Ср.знач.	10	6,51	22,75	69,55	242,85	160,5	105,6	46,04	563,25

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{563,25 - 22,75^2} = \sqrt{45,6875} = 6,759253$$

$$\sigma_y = \sqrt{105,6 - 10^2} = \sqrt{5,6} = 2,366432$$

Коэффициенты парной корреляции :

$$r_{yx_1} = \frac{69,55 - 10 \cdot 6,51}{1,913087 \cdot 2,366432} = 0,98295$$

$$r_{yx_2} = \frac{242,85 - 10 \cdot 22,75}{6,759253 \cdot 2,366432} = 0,959656$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{160,5 - 6,51 \cdot 22,75}{1,913087 \cdot 6,759253} = 0,95874$$

Теперь можем получить стандартизованные коэффициенты

$$\beta_1 = \frac{0,98295 - 0,959656 \cdot 0,95874}{1 - 0,95874^2} = 0,778161 \quad ,$$

$$\beta_2 = \frac{0,959656 - 0,98295 \cdot 0,95874}{1 - 0,95874^2} = 0,213602 \quad .$$

Итак , получено стандартизованное уравнение линейной регрессии:

$$t_y = 0,778161 \ t_{x_1} + 0,213602 \ t_{x_2}$$

Контрольные вопросы.

1) Назвать основные классы задач, при решении которых используют производственные функции.
2) Что такое дополнительный продукт фактора? Приведите общую формулу для расчета дополнительного продукта.
3) Каков экономический смысл дополнительного продукта? Как с помощью дополнительного продукта фактора могут быть определены изменения показателя эффективности при малых изменениях фактора?
4) Каким образом дополнительные продукты могут быть использованы для определения экстремального значения показателя эффективности?
5) Дать определение и запишите общее уравнение изоклинали.
6) Что такое средняя производительность по данному фактору?
7) Что такое коэффициент эластичности?
8) Что такое изокванта?
9) Какой знак имеет предельная норма заменяемости ля двух факторов, если увеличение обоих факторов порождает одно и то же направление изменения результативного показателя?
10) Вывести соотношения для экономических характеристик следующих производственных функций:
$y = 3.19 + 0.126x_1 + 0.81x_2 + 0.102x_3$;

Тема 6: Общая модель линейного программирования.

1. Понятие линейного программирования.
2. Составные части общей модели линейного программирования. Виды землеустроительных задач, сводящихся к общей модели линейного программирования.
3. Основные этапы постановки задачи линейного программирования.
4. Симплекс метод решения задач линейного программирования.
5. Геометрическая интерпретация задачи.
6. Двойственные задачи линейного программирования.

1. Понятие линейного программирования.

Исследование различных, в том числе и экономических, процессов обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения. При этом производится составление уравнений или неравенств, связывающих различные показатели (переменные) исследуемого процесса, которые образуют систему ограничений.

В этих соотношениях выделяются такие переменные, меняя которые, можно получить оптимальное значение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т.п.). Соответствующие методы, позволяющие решать указанные задачи, объединяются в общее название «математическое программирование» или «математический метод» исследования операций.

Математическое программирование включает в себя такие разделы математики как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.

Итак, математическое программирование — это раздел высшей математики, занимающийся решением задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

Методами математического программирования решаются задачи распределения ресурсов, планирования выпуска продукции, ценообразования, транспортные задачи и т.п.

Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б.Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Куй обобщил этот метод, после чего он получил название венгерского метода. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли американские ученые. В 1949 году американский ученый Джордж Бернард Данциг опубликовал один из основных методов решения задач линейного программирования, получивший название симплексный.

Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от классических задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. Методы математического анализа для поиска экстремума функции в задачах математического программирования оказываются непригодными.

Для решения задач математического программирования разработаны и разрабатываются специальные методы и теории. Так как при решении этих задач приходится выполнять значительный объем вычислений, то при сравнительной оценке методов большое значение придается эффективности и удобству их реализации на ЭВМ.

Математическое программирование можно рассматривать как совокупность самостоятельных разделов, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Понятие линейного программирования. Виды задач линейного программирования

Временем рождения линейного программирования принятии считать 1939г., когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича « Математические методы организации и планирования производства». Однако идеи Л.В. Канторовича не встретили понимания в момент их зарождения, были объявлены ересью, и работа была прервана.

Американский математик Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования(он получил название симплекс метода).

Свое второе рождение линейное программирование получило в начале пятидесятых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее в свою очередь развитие других разделов математического программирования. В 1975 году академик Канторович и американец профессор Купмасс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за « вклад в разработку теории и оптимального использования ресурсов в экономике».

Оптимизационная задача –это экономико-математическая задача в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторому области допустимых значений.

Линейное программирование (ЛП) – один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого и начала развиваться сама дисциплина "математическое программирование". Термин "программирование" в названии дисциплины ничего общего с термином "программирование (т.е. составление программы) для ЭВМ" не имеет, т.к. дисциплина "линейное программирование" возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться для решения математических, инженерных, экономических и др. задач.

Термин "линейное программирование" возник в результате неточного перевода английского "linear programming". Одно из значений слова "programming" - составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом английского "linear programming" было бы не "линейное программирование", а "линейное планирование", что более точно отражает содержание дисциплины. Однако, термины линейное программирование, нелинейное программирование, математическое программирование и т.д. в нашей литературе стали общепринятыми и поэтому будут сохранены.

Итак, линейное программирование возникло после второй мировой войны и стало быстро развиваться, привлекая внимание математиков, экономистов и инженеров благодаря возможности широкого практического применения, а также математической стройности.

Можно сказать, что линейное программирование применимо для решения математических моделей тех процессов и систем, в основу которых может быть положена гипотеза линейного представления реального мира.

Линейное программирование применяется при решении экономических задач, в таких задачах как управление и планирование производства; в задачах определения оптимального размещения оборудования на морских судах, в цехах; в задачах определения оптимального плана перевозок груза (транспортная задача); в задачах оптимального распределения кадров и т.д.

Задача линейного программирования (ЛП), как уже ясно из сказанного выше, состоит в нахождении минимума (или максимума) линейной функции при линейных ограничениях.

Задачи, решаемые методами линейного программирования, должны обязательно удовлетворять следующим требованиям:

- быть многовариантными (их решение не должно быть однозначным)
- иметь точно определенную целевую функцию, для которой ищется экстремальное (максимальное или минимальное) значение,
- иметь определенные ограничивающие условия, формирующие область допустимых решений задачи

Все модели линейного программирования имеют стандартные составные части, к которым относятся:

- совокупность основных переменных, характеризующих моделируемый объект.
- системы линейных ограничений (условий), определяющая область допустимых значений основных переменных. Каждое отдельное условие отражает какое-либо реальное ограничение, например, по наличию ресурсов (прежде всего земли), выполнению контрольных цифр бизнес-плана и госзаказа по производству растениеводческой или животноводческой продукции, нормам внесения удобрений в почву, агротехническим требованиям по размещению культур в севообороте и т.п.
- целевая функция, линейно зависящая от основных переменных и определяющая критерий оптимальности задачи. В качестве целевой функции, как правило, выбирают какой-либо показатель, обобщенно характеризующий один из аспектов деятельности хозяйства, рассматриваемой в данной землеустроительной задаче, - чистый доход, валовую продукцию в целом или по отдельной отрасли, объем смываемой почвы и т.д.

Постановка ЗЛП.

Пусть дана функция n переменных $f(x_1, x_2, ...x_n)$.Необходимо найти наибольшее или наименьшее значение этой функции при условии, что аргумент $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \text{e} X$:

$f(x) \to \max(\min)$,

Поставленная таким образом задача оптимизации называется задачей математического программирования. Множество X называется множеством допустимых решений, а функция f(x)- целевой функцией или функцией цели.

Если целевая функция f(x) является линейной, а множество X задается с помощью системы линейных уравнений и неравенств, то задача называется задачей линейного программирования (ЗЛП).

Определение 1. Задача, к которой требуется найти экстремум функции

$$L(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots a_{k+1,n}x_n = b_{k+1} \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, p}, p \le n$

называется *общей задачей линейного программирования* .

Задача в краткой записи имеет вид

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1, k} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{k+1, m} \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, p}, p \le n$

Определение 2. Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1, m} \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$

называется *задачей линейного программирования*, заданной в *канонической* форме.

Определение 3. Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,m} \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$

называется *задачей линейного программирования* заданной в симметричной форме записи.

Определение 4. Функция $L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ называется *целевой функцией* задачи линейного программирования.

Определение 5. Совокупность чисел $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая ограничениям задачи линейного программирования, называется *допустимым решением задачи линейного программирования.*

Определение 6. Допустимое решение, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным решением задачи линейного программирования.*

Система линейных или нелинейных ограничений, которой не отвечает ни одна совокупность неотрицательных значений переменных, называется *несовместной;* такая задача не имеет решения. Несовместность системы можно обнаружить или путем простого логического анализа, или с помощью специальных математических приемов (например, теории определителей). *Совместной* называется система, имеющая хотя бы одно допустимое решение.

Переход от симметричной формы задачи к канонической осуществляется путем ведения в каждое неравенство системы ограничений балансовой переменной , в результате чего ограничения принимают вид уравнений. В целевую функцию балансовое переменные вводятся с нулевыми коэффициентами.

2. Составные части общей модели линейного программирования. Виды землеустроительных задач, сводящихся к общей модели линейного программирования.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые в практических целях задачи линейного программирования.

Задача об оптимальном использовании ресурсов.

Предприятие может выпускать n видов продукции, используя для этого m видов ресурсов. Известны затраты каждого вида ресурса на производство единицы каждого вида продукции и прибыль от реализации единицы каждого вида продукции. Требуется составить план выпуска продукции так, чтобы при данных запасах ресурсов получить максимальную прибыль.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначения:

$b_i, i = 1,2,...m$ -запасы i-го вида ресурса;

$a_{ij}, i - 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n$ -затраты i-го вида ресурса на производство j-го вида продукции;

$c_j,\ j = 1,2,..., n$ -прибыль от реализации единицы j-го вида продукции.

Данные задачи можно представить в виде таблицы.

Виды ресурсов	Виды продукции	Запасы ресурсов
	1 2 … j … n	
1	a_{11} a_{12} … a_{1j} … a_{1n}	b_1
2	a_{21} a_{22} … a_{2j} … a_{2n}	b_2
…	…	…
i	a_{i1} a_{i2} … a_{ij} … a_{in}	b_i
…	… … …	…
m	a_{m1} a_{m2} … a_{mj} … a_{mn}	b_m
Прибыль от реализации Единицы продукции	c_1 c_2 … c_j … c_n	

Обозначим через x_j - планируемый выпуск j-го вида продукции $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$-план выпуска продукции. Тогда прибыль от реализации всей выпускаемой продукции составит

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n .$$

Составим ограничения по ресурсам. Найдем расход ресурса первого вида при данном виде выпуска:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + .. + a_{1n}x_n .$$

Ресурса первого вида имеется в наличии b_1 условных единиц, т.е. получаем ограничение:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le b_1 .$$

Аналогично составляем ограничения по всем остальным видам ресурсов.

Кроме того, $x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$, так как количество продукции не может быть отрицательным числом.

Таким образом, математической моделью данной задачи является задача линейного программирования: найти наибольшее значение функции

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \; i = \overline{1,m} \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}$$

Задача о диете.

В продаже имеются различные виды продуктов. Известны цены продуктов, содержание питательных веществ в единице каждого вида продукта, медицинские требования на содержание питательных веществ в суточной диете. Требуется определить, какие продукты, и в каком количестве нужно включить в диету, чтобы она соответствовала всем медицинским требованиям и чтобы стоимость диеты была минимальной.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначения:

a_{ij} -содержание i-го питательного вещества в единице j-го продукта;

b_i -минимальное содержание i-го питательного вещества в суточной диете;

c_j -цени единицы j-го продукта.

Данные задачи можно представить в виде таблицы.

Виды питательных веществ	Виды продуктов 1 2 … j … n	Медицинское требование к диете
1	a_{11} a_{12} … a_{1j} … a_{1n}	b_1
2	a_{21} a_{22} … a_{2j} … a_{2n}	b_2
…	…	…
i	a_{i1} a_{i2} … a_{ij} … a_{in}	b_i
…	… … …	…
m	a_{m1} a_{m2} … a_{mj} … a_{mn}	b_m
Цена единицы продукта	c_1 c_2 … c_j … c_n	

Пусть x_j -количество единиц j-го продукта включается в суточную диету, тогда $\bar{x}(x_1, x_2,.., x_n)$-суточная диета.

Цена диеты:

$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n$.

Содержание первого питательного вещества в диете составит

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + .. + a_{1n}x_n$

и это количество должно быть не менее чем b_1 единиц:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le b_1$.

Аналогично составляем ограничения по всем видам питательных веществ.

Кроме того, $x_j \ge 0$,так как количество продуктов не может быть отрицательным числом.

Математическая модель задачи: найти минимум функции

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,m} \\ \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

Таким образом, математической моделью данной задачи является задача линейного программирования.

Задача на оптимальный раскрой материала.

Имеются прутки одинаковой длины, из которых нужно нарезать определенное количество заготовок заданной длины. Прутки можно нарезать на заготовки в различных сочетаниях. При каждом варианте нарезания прутков остаются концевые отрезки.

Требуется определить, какое количество прутков следует разрезать по каждому варианту, чтобы получить заданное количество заготовок различной длины и чтобы общая длина концевых отрезков была минимальной.

Составим математическую модель данной задачи.

Введем обозначения:

i- номер вида заготовки, i=$\overline{i, m}$;

j- номер варианта раскроя прутка, $j = \overline{1,n}$;

a_{ij} -количество заготовок i-го вида, получаемых из одного прутка, разрезаемого по j-му варианту;

b_i -требуемое число заготовок i-го вида;

c_j -длина концевого отрезка, оставшегося от одного прутка при разрезании прутка по j-му варианту.

Данные задачи можно представить в виде таблицы.

Виды заготовок	Варианты раскроя	План по заготовкам
	1 2 … j … n	
1	a_{11} a_{12} … a_{1j} … a_{1n}	b_1
2	a_{21} a_{22} … a_{2j} … a_{2n}	b_2
…	…	…
i	a_{i1} a_{i2} … a_{ij} … a_{in}	b_i
…	… … …	…

m	$a_{m1} \quad a_{m2} \ \dots \ a_{mj} \ \dots \quad a_{mn}$	b_m
Длина концевого отрезка	$c_1 \quad c_2 \ \dots \ c_j \ \dots \quad c_n$	

Обозначим через x_j -число прутков, разрезаемых по j-му варианту, тогда $\overline{x}(x_1, x_2,.., x_n)$-план раскроя прутков. Найдем общую длину концевых отрезков. По первому варианту планируем разрезать x_1 прутков, концевой отрезок от одного прутка будет иметь длину c_1, тогда общая длина концевых отрезков от x_1 прутков составит c_1x_1. Аналогично общая длина концевых отрезков от x_2 прутков, разрезанных по второму варианту, будет равна c_2x_2 и т. д.

Следовательно, общая длина концевых отрезков при разрезании прутков по всем вариантам составляет

$$L(x\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Составим ограничения по заготовкам.

Из одного прутка, разрезаемого по первому варианту, получают a_{11} шт. заготовок первого вида, а из x_1 прутков - $a_{11}x_1$ шт.; по второму варианту из одного прутка получают a_{12} шт., а из x_2 прутков- $a_{12}x_2$ шт. и т. д., по n-му варианту - $a_{1n}x_n$ шт. Отсюда получаем первое ограничение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

Аналогично получаем ограничения по всем заготовкам.

Кроме того, $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, так как число прутков не может быть отрицательным.

Математическая модель задачи: найти наименьшее значение функции

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m} \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$.

Таким образом, математической моделью данной задачи является задача линейного программирования.

Пример: Привести к канонической форме следующую задачу линейно программирования

$$L(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$$
$$2x_2 - x_3 \le 5;$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \ge -1;$$
$$2x_1 - x_2 \le -3;$$
$$x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Введем в каждое уравнение системы ограничений выравнивающие переменные x_4, x_5, x_6.

Система запишется в виде равенств, причем в первое и третье уравнение системы ограничений переменные x_4, x_6.вводятся в левую часть со знаком «+», а во второе уравнение x_5со знаком «-».

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 5;$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_6 = -3;$$
$$x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Свободные члены в канонической форме должны быть положительными, для этого два последних уравнения умножим на -1.

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 5;$$
$$- x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1;$$
$$-2x_1 + x_2 - x_6 = 3;$$
$$x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Задача 1. В хозяйстве имеется 200 га неиспользуемых земель, пригодных для освоения под пашню и сенокос. Затраты труда на освоение 1 га земель под пашню составляют 200 чел.-ч, в сенокос – 50 чел.ч. Для вовлечения земель в сельскохозяйственный оборот предприятие может затратить не более 15 тыс. чел.-ч механизированного труда. Стоимость продукции, получаемой с 1 га пашни, составляет 600 руб., с 1 га сенокосов – 200 руб. В задании на проектирование установлено, что площадь земель, осваиваемых под пашню, не должна превышать 2/3 площади сенокосов. Требуется определить, какую площадь необходимо освоить под пашню и сенокосы, чтобы получить максимальное количество продукции в стоимостном выражении.

Решение.

Введем следующие основные переменные:

X_1 – площадь, трансформируемая в пашню, га

X_2 – площадь, трансформируемая в сенокосы, га

Исходя из условий задачи, запишем целевую функцию (стоимость произведенной продукции):

$$Z = 600x_1 + 200x_2 \to \max$$

В данной задаче имеется три ограничения:
по общему количеству земли, выделяемой для освоения:

$$x_1 + x_2 \le 200$$

по использованию трудовых ресурсов:

$$200x_1 + 50x_2 \le 15000$$

по соотношению площадей пашни и сенокосов:

$$\frac{2}{3}x_2 \ge x_1,$$

что равнозначно $x_1 \le 0.667x_2$ или $x_1 - 0.667x_2 \le 0$.
Дополнительно к приведенным ограничениям зададим условия неотрицательности основных переменных:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Таким образом, ставится задача линейного программирования:
Найти максимум функции:

$$Z = 600x_1 + 200x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \le 200$$
$$200x_1 + 50x_2 \le 15000$$
$$x_1 - 0.667x_2 \le 0$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Оптимальное решение:
площадь земель, осваиваемых под пашню (x_1) – 33 га
площадь земель, осваиваемых под сенокос (x_2) – 167 га.

При этом максимальное значение целевой функции (стоимость производимой продукции) составляет Z_{max}=72.0 тыс.руб,), которое получается без учета ограничений на затраты механизированного труда и фактически определяется рекомендуемым соотношением пашни и сенокосов.

Задача 2. Для жизнедеятельности человека среднего возраста ежедневно необходимо потреблять 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг продуктов питания, а также стоимость этих продуктов в магазине приведены в таблице. Требуется составить суточный рацион, содержащий не менее указанных выше необходимых питательных веществ и обеспечивающий минимальную общую стоимость закупаемых продуктов.

Питательные вещества	*Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов, г*						*необходимость*
	мясо	*рыба*	*масло*	*картофель*	*сыр*	*крупа*	

Белки	180	190	70	21	260	130	118
Жиры	20	3	865	2	310	30	56
Углеводы	0	0	6	200	20	650	500
Минеральные соли	9	10	12	70	60	20	8
Стоимость 1 кг продукта, руб.	180	150	120	15	150	20	

Обозначим через $x_1, x_2 ... x_6$ количество покупаемого каждого вида продукта. Тогда целевая функция данной задачи – обеспечение минимальных затрат на покупку продуктов питания – будет записана в виде

$$L(\bar{x}) = 180x_1 + 150x_2 + 120x_3 + 15x_4 + 150x_5 + 20x_6 \to \min$$

при следующих ограничениях

$$\begin{aligned}
&180x_1 + 190x_2 + 70x_3 + 21x_4 + 260x_5 + 130x_6 \geq 118 \\
&20x_1 + 3x_2 + 865x_3 + 2x_4 + 310x_5 + 30x_6 \geq 56 \\
&6x_3 + 200x_4 + 20x_5 + 650x_6 \geq 500 \\
&9x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 20x_6 \geq 8 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Задача 3. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице.

Характеристика	*Компонент автомобильного бензина*			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден.ед. за т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Целевая функция данной задачи записывается в виде

$$L(\bar{x}) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \to \min$$

Первое ограничение по октановому числу:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000$$

Второе ограничение по содержанию серы:

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \geq 0{,}3 \cdot 1000 \,.$$

Приведем ограничения по используемым ресурсам:

$$x_1 \leq 700,$$
$$x_2 \leq 600,$$
$$x_3 \leq 500,$$
$$x_4 \leq 300$$

Последнее ограничение должно быть на неотрицательность введенных переменных, т.е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \,.$$

3.Основные этапы постановки задачи линейного программирования.

Модель – один из важнейших инструментов научного познания, условный образ объекта исследования.

Математические модели представляют собой абстрактные описания субъектов, явлений или процессов с помощью знаков (символов), поэтому их также называют абстрактными или знаковыми. Обычно они имеют вид некой совокупности уравнений или неравенств, таблиц, графиков, формул и других средств математического описания моделируемых объектов, явлений, процессов.

Отображение изучаемой системы как совокупности определяемых ее элементов , существенных с точки зрения поставленных целей и взаимосвязей между ними гоморфно (подобно) данной системе. Результатом этой работы является создание образа системы или какого-нибудь процесса.

Этому образу строго соответствует построенная модель. В этом случае мы говорим об адекватности образа системы и ее модели. Рассмотрим этапы построения модели:

Название этапа	**Информация**
1. Постановка задачи.	1. Перечень величин, подлежащих определению и дающих субъективную и исчерпывающую характеристику состояния объекта управления. 2. Условия, которые должны учитываться при определении значений величин, указанных выше. 3. Параметры, связывающие названные характеристики и условия. 4. Если задача оптимизационная, то должен быть словесно сформулирован четкий критерий или набор критериев оптимальности.
2. Формализованное описание.	1. Показатели, выражающие характеристики объекта управления, искомые величины, параметры процесса, факторы и условия, регламентирующие производства. 2. Информация количественного характера, являющаяся исходной для формирования модели. 3. Зависимости моделируемого процесса, выраженные математическими символами в неявном виде.
3. Формализация в общем виде.	1. Зависимостям придается явный вид, например $ax \geq в$. 2. Рассматриваются вопросы снижения размерности задачи и упрощения формализованной записи.
4. Численное представление.	1. Символы заменяются на конкретные числовые данные, например $5x + 4y \geq 13$ 2. Проводится предварительная обработка данных для ввода в модель.

Перечислим основные принципы построения экономико-математических моделей:

1. Принцип достаточности исходной информации. В каждой модели должна использоваться только та информация, которая известна с точностью, требуемой для получения результатов моделирования.

2. Принцип инвариантности (однозначности) информации требует, чтобы входная информация, используемая в модели, была независима от тех параметров моделируемой системы, которые еще неизвестны на данной стадии исследования.

3. Принцип преемственности. Сводится к тому, что каждая последующая модель не должна нарушать свойств объекта, установленных или отраженных в предыдущих моделях.

4. Принцип эффективной реализуемости. Необходимо, чтобы модель могла быть реализована при помощи современных вычислительных средств.

После построения ЭММ проводится экономико-математический анализ модели с целью выявления ее особенностей и выбора:

Теории, в рамках которой может быть получено решение задачи;

Группы или класса методов данной теории, наиболее пригодных для решения сформулированной задачи;

Конкретного числового метода, который является наиболее целесообразным и эффективным для решения задачи на базе сформулированной ЭММ с учетом ее размерности и имеющейся вычислительной техники.

4. Симплекс метод решения задач линейного программирования.

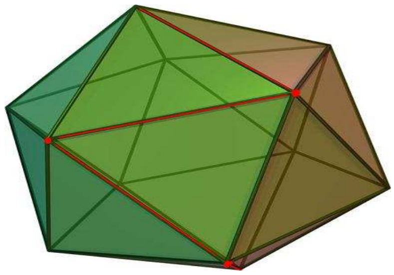
В конце 40-х годов американским математиком Дж. Данцигом был разработан эффективный метод решения задач математического программирования – симплекс-метод. К задачам, решаемых этим методом в рамках математического программирования относятся такие типичные экономические задачи как «Определение наилучшего состава смеси», «Задача об оптимальном плане выпуска продукции», «Оптимизация межотраслевых потоков», « Задача о выборе производственной программы», «Транспортная задача», «Задача размещения», «Модель Неймана расширяющейся экономики» и другие. Решение таких задач дает большие выгоды как народному хозяйству в целом, так и отдельным его отраслям.

Симплекс-метод - алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Задача линейного программирования состоит в том, что необходимо максимизировать или минимизировать некоторый линейный функционал на многомерном пространстве при заданных линейных ограничениях.

Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве. В результате все неравенства ограничивают некоторый многогранник (возможно, бесконечный), называемый также полиэдральным конусом.

Принцип симплекс-метода состоит в том, что выбирается одна из вершин многогранника, после чего начинается движение по его рёбрам от вершины к вершине в сторону увеличения значения функционала. Когда переход по ребру из текущей вершины в другую вершину с более высоким значением функционала невозможен, считается, что оптимальное значение с найдено.



Многогранник ограничивающих условий для 3-мерного пространства.

Симплекс метод - метод линейного программирования, который реализует рациональный перебор базисных допустимых решений, в виде конечного итеративного процесса, необходимо улучшающего значение целевой функции на каждом шаге.

Применение симплекс-метода для задачи линейного программирования предполагает предварительное приведение ее формальной постановки к канонической форме с n неотрицательными переменными: (X1, ..., Xn), где требуется минимизация линейной целевой функции при m линейных ограничениях типа равенств. Среди переменных задачи выбирается начальный базис из m переменных, для определенности (X1, ..., Xm), которые должны иметь неотрицательные значения, когда остальные (n-m) свободные переменные равны 0. Целевая функция и ограничения равенства преобразуются к диагональной форме относительно базисных переменных, переменных, где каждая базисная переменная входит только в одно уравнение с коэффициентом 1.

Данная формальная модель задачи линейного программирования обычно задается в форме, так называемой симплекс-таблицы, удобной для выполнения операций симплекс-метода.

Алгоритм симплексного метода.

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая , то ее надо привести к каноническому виду.
2. Находим исходное опорное решение и проверяем ее на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу. Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

c_i	БП	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	L(x)
		x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	…	0	$h_{1,m+1}$	…	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	…	0	$h_{2,m+1}$	…	h_{2n}	f_2
…	…	…	…	…	…	…	...	…	…
c_m	x_m	0	0	…	1	$h_{m,m+1}$	…	h_{mn}	f_m
Δ_j		0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n	$L(x_1)$

Индексная строка для переменных находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}$$

и по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ для свободного члена.

Возможны следующие случаи при решении задачи на максимум:

- ✓ Если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;
- ✓ Если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$,но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как L(x)→∞, т.е. целевая функция неограниченна в области допустимых решений;
- ✓ Если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно прейти к другому опорному решению;
- ✓ Если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка. Если хотя бы одна оценка $\Delta_k < 0,$ то k-й столбец принимаем за ключевой. За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов к положительным коэффициентам k-го столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называется ключевым элементом.

3.Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

- ➢ Переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;
- ➢ Заполняем базисные столбцы;
- ➢ Находим остальные коэффициенты таблицы;

Примечание. Если целевая функция L(x) требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок Δ_j при всех j=1,2,…n.

5. Геометрическая интерпретация задачи.

В отдельных случаях задачи линейного программирования удается решить с помощью наиболее простого и наглядного геометрического метода.

Геометрический метод позволяет наглядно описать область допустимых решений, критерий оптимальности (целевую функцию) и процесс получения оптимального решения путем последовательного приближения по допустимым вариантам.

Графический метод применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть дана задача линейного программирования в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные.

Рассмотрим следующую задачу: найти экстремум функции

$$L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to extr$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение задачи начинают с построения области допустимых решений. При этом возможны следующие случаи.

Область допустимых решений - пустое множество. В этом случае задача линейного программирования не имеет оптимального решения из-за несовместимости системы ограничений.

1. Область допустимых решений - единственная точка. Тогда задача линейного программирования имеет единственное и оптимальное решение.
2. Область допустимых решений – выпуклый многоугольник. В этом случае, чтобы найти оптимальное решение задачи, можно найти координаты всех угловых точек многоугольника,

вычислить значение целевой функции во всех угловых точек и выбрать наибольшее (или наименьшее) из этих значений. Координаты соответствующей угловой точки являются оптимальным решением.

3. Область допустимых решений - выпуклая неограниченная область. В этом случае экстремум может не существовать из-за неограниченности целевой функции сверху в задаче на максимум, т. е. $L(\bar{x}) \to +\infty$, или снизу в задаче на минимум, т. е. $L(\bar{x}) \to -\infty$, или находиться в одной из угловых точек области допустимых решений.

Существует и другой способ, который позволяет сразу найти графически угловую точку, соответствующую оптимальному решению.

Пуст c_0- некоторое число. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$ является линией уровня целевой функции. В каждой точке этой прямой целевая функция принимает одно и тоже значение, равное c_0. Вектор – градиент целевой функции $\bar{c} = gradL(x) = (\frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2}) = (c_1; c_2)$

перпендикулярен линиям уровня и показывает направление, в котором эта функция возрастает с наибольшей скорость. Выбирая из линий уровня, проходящих через область допустимых решений, наиболее удаленную в направлении вектора **с** (в случае минимизации - в противоположном направлении), определим угловую точку, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Если экстремум достигается сразу в двух смежных точках, то оптимальным будет решением любая точка отрезка, соединяющего эти точки:

$$\overline{x_{\text{опт}}} = t\overline{x_{1\text{опт}}} + (1-t)\overline{x_{2\text{опт}}}, [0;1] \ni t .$$

Алгоритм графического метода.

1. Построить ОДР.
2. Построить вектор-градиент целевой функции $\bar{c} = (c_1, c_2)$.
3. Построить семейство линий уровня, перпендикулярных вектору $\bar{c}$, проходящих через ОДР.
4. Выбрать линию уровня проходящую через ОДР и наиболее удаленную в направлении вектора $\bar{c} = (c_1, c_2)$ (или в противоположном вектору $\bar{c}$ направлении- в задаче на минимум).Определить угловые точки области, через которые она проходит.
5. Найти координаты точек экстремума и значение целевой функции в этих точках.

Рассмотрим пример1.

Целевая функция $F = 12x_1 + 10x_2$

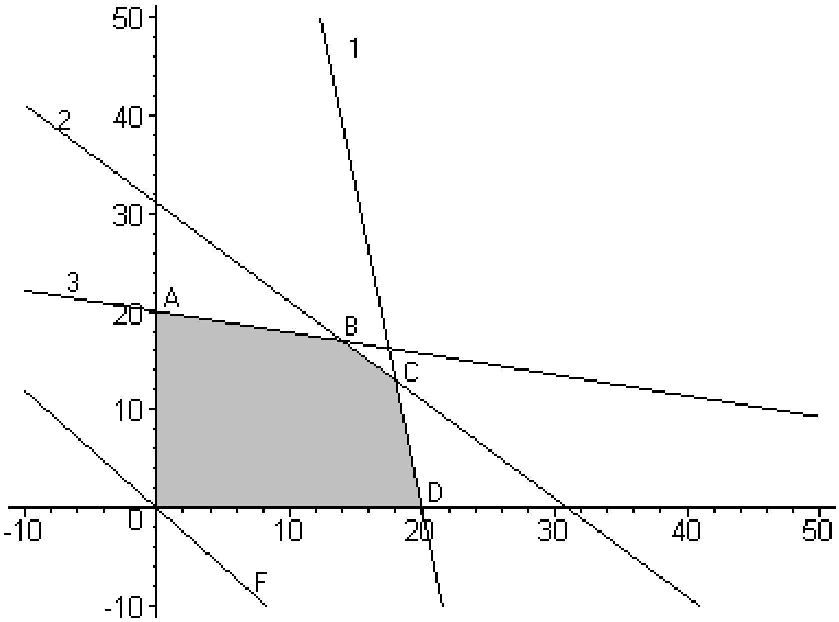
Система ограничений

$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 \le 260 & 1 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 124 & 2 \\ 3x_1 + 14x_2 \le 280 & 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

задание: максимизировать целевую функцию $F = 12x_1 + 10x_2$.

Геометрический метод решения.



Найдем множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе ограничений. Многоугольник OABCD – область допустимых решений. Среди точек многоугольника выберем такую, в которой целевая функция достигает максимального значения. Для этого по уравнению $12x_1 + 10x_2 = \tilde{n}$ сроим несколько линий уровня $F(x_1, x_2)$, произвольно выбирая с. Последней вершиной, к которой прикоснется прямая $12x_1 + 10x_2 = \tilde{n}$ при выходе за границу многоугольника допустимых решений системы ограничений, будет точка С. В точке С пересекаются две прямые, поэтому для нахождения координат точки достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 13x_1 + 2x_2 \le 260 & 1 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 124 & 2 \end{cases}$$

В результате получаем: (18, 13). Полученное решение будет оптимальным производственным планом, дающим максимальную прибыль.

$F(18,13) = 12 \cdot 18 + 10 \cdot 13 = 346$ руб.

Ответ: чтобы максимизировать прибыль от реализации продукции необходимо выпускать 18 единиц продукции первого вида и 13 единиц продукции второго вида.

Пример 2. Решить графическим способом следующую двумерную задачу линейного программирования:

$$F = -3x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение

Построение области допустимых решений целевой функции F.

Построим прямоугольную систему координат. Так как, x_1 и x_2 неотрицательны, то можно ограничится рассмотрением первого квадранта (рис 4).

Рассмотрим первое ограничение:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + 4x_2 \le 10 & & & \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 & & & (1) \\ x_1 = 0 & \Rightarrow & x_2 = 2{,}5 & (0;\ 2{,}5) \\ x_2 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 5 & (5;\ 0) \end{array}$$

Рассмотрим второе ограничение:

$$\begin{array}{llll} 3x_1 + x_2 \le 6 & & & \\ 3x_1 + x_2 = 6 & & & (2) \\ x_1 = 0 & \Rightarrow & x_2 = 6 & (0;\ 6) \\ x_2 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 2 & (2;\ 0) \end{array}$$

Отложим полученные точки на числовых осях и найдем полуплоскости, которые соответствуют первым трем ограничениям (на рисунке они указаны стрелками). Заштрихованная область OABC - область допустимых решений функции F.

Построение прямой уровня.

Возьмем произвольную точку, принадлежащую области допустимых решений - OABC, например, точку M с координатами (1; 1). Подставим координаты точки M в функцию F.

$$F(1;\,1) = -31 - 1 = -4$$

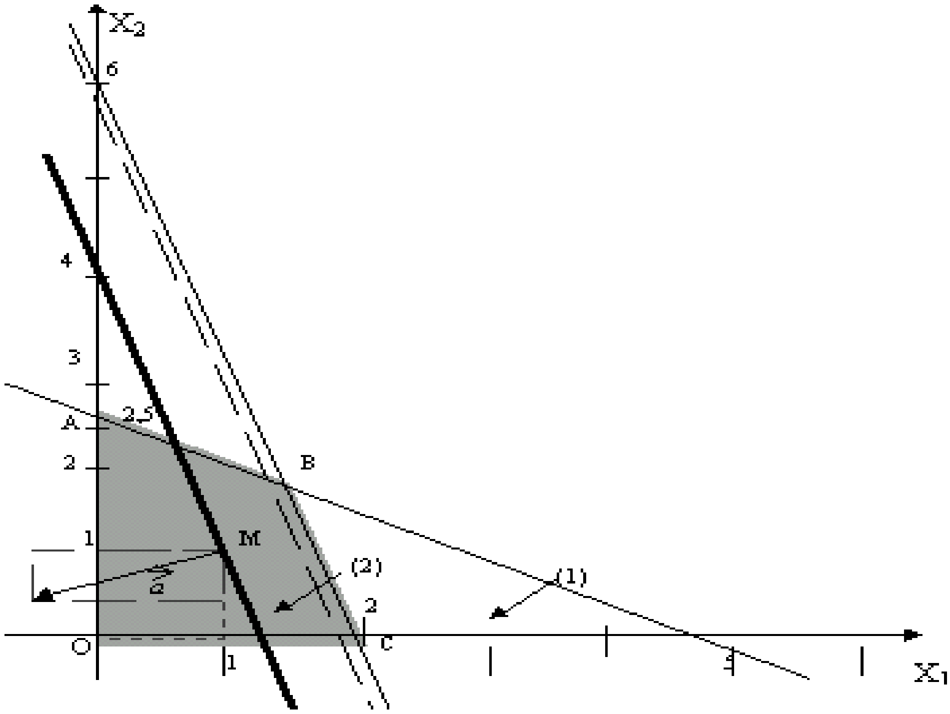
Прямая уровня будет иметь следующий вид: $-3x1 - x2 = -4$

Найдем две точки этой прямой - (1; 1) и (0; 4) (если x_1=0, то x_2=4). Построим прямую уровня. Вектор a{-3; -1}, отложенный от точки M указывает направления возрастания функции F. Минимизируем данную функцию F.

Минимизация целевой функции F.

Так как построенный вектор a - является вектором, указывающем направление возрастания функции F, то передвижение прямой уровня в направлении, обратном вектору a позволит нам найти точку минимума. Но так как прямая уровня параллельна прямой (2), то любая точка на отрезке BC является оптимальным решением. В частности в вершинах B(1,5 ; 1,5) и C(2; 0).

$$F(1{,}5;\,1{,}5) = F(2;\,0) = -6$$



Ответ: Минимум функции F равен - 6, и он достигается в любой точке, принадлежащей отрезку BC.

Задача1. Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365
Отпускная цена 1 кг	42	57	

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки.

Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение.

Обозначим x_1 - суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг, x_2 - суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.
Составим **математическую модель** задачи.
Целевая функция будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 42x_1 + 57x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 & \text{ограничение по молоку} \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 & \text{ограничение по наполнителям} \\ x_1 - x_2 \le 100 & \text{рыночное ограничение по спросу} \\ x_2 \le 350 & \text{рыночное ограничение по спросу} \end{cases}$$

1. Построить область допустимых решений (неотрицательных).
2. Построим вектор c(42;57). Перемещаем линию уровня по направлению вектора c. Точкой выхода из области допустимых решений является точка D, ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных прямыми

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим координаты точки D(312,5;300), которая является оптимальным решением, т.е.

$\bar{x}_{\text{îïò}} = (312{,}5;300)$.

При этом

$L(\bar{x})_{\max} = 42 \cdot 312.5 + 57 \cdot 300 = 13125 + 17100 = 30225$

Итак, максимальный доход от реализации составит 30 225 ден.единиц в сутки при выпуске 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого.

6. Двойственные задачи линейного программирования.

Произвольную задачу линейного программирования можно определенным образом сопоставить с другой задачей линейного программирования, называемой двойственной. Первоначальная задача является исходной. Эти две задачи тесно связаны между собой и образуют единую двойственную пару.

Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи.

<u>Симметричные двойственные задачи.</u>

Дана исходная задача

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}$$

Задача дана в неканоническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи, для этого:

- каждому неравенству системы ограничений исходной задачи приводим в соответствие переменную y_i;
- составляем целевую функцию, коэффициентами которой являются свободные члены системы ограничений исходной задачи;
- составляем систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные;
- свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи. Все переменные двойственной задачи неотрицательные.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

<u>Несимметричные двойственные задачи.</u>

Дана исходная задача

$$L(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$

Задача дана в каноническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи.

Для ее составления пользуются тем же правилом, что и для составления симметричной задачи, с учетом следующих особенностей:

- ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства $\geq$, если максимум, то $\leq$;
- переменные y_i - произвольные по знаку.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид

$$S(\overline{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

y_i - произвольные по знаку, $i = \overline{1,m}$

<u>Смешанные двойственные задачи.</u>

Математическая модель исходной задачи имеет условия симметричных и несимметричных задач. При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила симметричных и несимметричных задач.

Основные теоремы двойственности.

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений X и Y выполняется равенство

$$L(\overline{x})_{\max} = S(\overline{y})_{\min}$$

Если одна из двойственных задач неразрешима ввиду того, что $L(\overline{x})_{\max} \to \infty$ (или $S(\overline{y})_{\min} \to -\infty$), то другая задача на имеет допустимых решений.

Теорема 2. Для оптимальности допустимых решений X и Y пары двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} x_{\text{оптj}}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{\text{оптi}} - c_j) = 0, \\ y_{\text{оптi}}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{\text{оптj}} - b_i) = 0. \end{cases}$$

Теоремы позволяют определить оптимальное решение одной из пары задач по решению другой.

Решение двойственных задач.

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача	**Двойственная задача**
$L(\overline{x}) = x_1 - x_2 \to \max$	$L(\overline{x}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \mid y_1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \mid y_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \mid y_3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 \mid x_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 \mid x_2 \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Решая исходную задачу графическим методом, получим $X_{\text{опт}} = (4,1)$, при этом $L(\overline{x}\ )_{\max} = 3$.

На основании первой теоремы двойственности

$L(\overline{x}\ )_{\max} = S(\overline{y})_{\min} = 3$.

Так как $x_1, x_2 \ge 0$, то по 2-й теореме двойственности систему ограничений двойственной задачи можно записать в виде равенств:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

Подставляя $X_{\text{опт}}$ в систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} -2*4+1 \le 2, 9 \le 2 \Rightarrow y_1 = 0, \\ 4-2*1 \le 2, 2 = 2 \Rightarrow y_2 > 0, \\ 4+1 \le 5, 5 = 5 \Rightarrow y_3 > 0 \end{cases}$$

Тогда система ограничений двойственной задачи примет вид

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1 \\ -2y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$$

Откуда $Y_{опт}=(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, при этом $S(\overline{y})_{\min}=3$.

Пусть дано решение двойственной задачи $Y_{опт}=(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $S(\overline{y})_{\min}=3$, найдем решение исходной.

По 1-й теореме двойственности $L(\overline{x})_{\max}=S(\overline{y})_{\min}=3$. Так как $y_1>0, y_2>0$, то по 2-й теореме двойственности второе и третье неравенства исходной задачи обращаются в равенства:

$$\begin{cases} x_1-2x_2=2, \\ x_1+x_2=5 \\ \end{cases}$$

Откуда $X_{опт}=(4{,}1)$, при этом $L(\overline{x})_{\max}=3$

Контрольные вопросы.

1) Сформулируйте общие требования к задачам, решаемые методами линейного программирования.
2) Как вы понимаете назначение линейного программирования? Каковы его преимущества перед традиционными способами проектирования и экономического обоснования проектных решений?
3) Назовите основные виды алгоритмов линейного программирования и охарактеризуйте кратко их суть.
4) Назовите основные составные части модели линейного программирования.
5) Какие аспекты землеустроительного проектирования отражают:
6) Совокупность основных переменных задачи;
7) Система линейных ограничений или условий;
8) Целевая функция?
9) Приведите общий вид целевой функции общей задачи линейного программирования.
10) Какие виды землеустроительных задач сводятся к общей задаче линейного программирования? Приведите примеры.
11) Назовите основные этапы постановки задачи линейного программирования.
12) Какой характерный вид имеют ресурсные ограничения задачи линейного программирования? Приведите примеры?

13) Какой общий вид имеют ограничения по кормам? Какие разновидности ограничений по кормам вы можете назвать?
14) Что такое «каноническое представление» задачи линейного программирования?
15) Каким образом задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду?
16) Каким методом решаются общие задачи линейного программирования?
17) Что такое область допустимых значений основных переменных задачи линейного программирования?
18) Чем определяются границы области допустимых решений для задач линейного программирования?
19) Как геометрически изображается целевая функция задачи линейного программирования, в которой число основных переменных равно двум?
20) Что такое «линия уровня»?
21) Что такое «допустимое базисное решение» задачи линейного программирования?

Тема 7: Распределительная (транспортная) модель линейного программирования и ее применение в землеустройстве.

1. Постановка задач распределительного типа. Виды землеустроительных задач, относящихся к данному типу.
2. Методы решения задач транспортного типа.
3. Особые случаи постановки решения задач распределительного типа.
4. Примеры решения землеустроительных задач.

1. Постановка задач распределительного типа. Виды землеустроительных задач, относящихся к данному типу.

Транспортная задача является представителем класса задач линейного программирования и поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач, но одновременно она имеет и ряд дополнительных полезных свойств, которые позволили разработать специальные методы ее решения.

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных специальных задач линейного программирования. Частные постановки задачи рассмотрены рядом специалистов по транспорту, например О.Н. Толстым.

Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Ф. Хичкоку, поэтому в зарубежной литературе ее называют проблемой Хичкока.

Первый точный метод решения транспортной задачи разработан Л.В. Канторовичем и М.К.Гавуриным. Под названием «транспортная задача» объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Постановка задачи.

Под термином «транспортные задачи» понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у m производителей (поставщиков), по n потребителям этих ресурсов. Различают два типа транспортных задач: по критерию стоимости (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию) и по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

Наиболее часто встречаются следующие задачи, относящиеся к транспортным:

- ✓ Прикрепление потребителей ресурса к производителям;
- ✓ Привязка пунктов отправления к пунктам назначения;
- ✓ Взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направления;
- ✓ Отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;

- ✓ Оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.

Рассмотрим экономико-математическую модель транспортной задачи.

Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_m$

на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_m.$

Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Имеется n пунктов назначения:

$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_j, \ldots, B_n$,

которые подали заявку на поставку грузов в объемах соответственно:

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_j, \ldots, b_n$.

Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф), образующих матрицу транспортных издержек. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов

Формулировка транспортной задачи:

Необходимо составить оптимальный план, т.е. найти такие значения объема перевозок грузов x_{ij} от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы удовлетворить заявки каждого потреби6теля и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза. Данные задачи можно представить в таблице

Пункты отправления	**Пункты назначения**						**Запасы a_i**
	B_1	**B_2**	**…**	**B_j**	**…**	**B_n**	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1

A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Задача заключается в определении плана перевозок – матрицы X (i=1,…,m, j=1,…,n), которая удовлетворяет следующим условиям:

Целевая функция имеет вид

$$L(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

Ограничения по запасам:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \ j = \overline{1,n}$$

Ограничения по потребностям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \, i = \overline{1,m}$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребите т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} b_j = \sum_{j=1}^{n} a_i$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель- открытой.

Транспортную задачу можно решить симплексным методом, но существуют более простые методы решения транспортных задач, которые являются модификацией симплексного метода. В них применяется тот же прием последовательного улучшения решений, который состоит из трех этапов:

1) находится исходное опорное решение,

2) оценка решения на оптимальность,

3) переход к другому, лучшему опорному решению путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.

Важнейшие отличительные особенности распределительных (транспортных) задач:

- условия задачи описываются только уравнениями
- все переменные выражаются в одних и тех же единицах измерения
- во всех уравнениях коэффициенты при переменных равны единице
- каждая переменная встречается только в двух уравнениях системы ограничений: в одном по строке (по запасам) и в одном по столбцу (по потребностям).

Целевая функция выражает суммарные расходы на транспортировку груза.

2. Методы решения задач транспортного типа.

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы условий , соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Существует четыре метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла , метод минимального элемента, метод двойного предпочтения и метод Фогеля. «Качество» опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо - западного угла- наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение клеток происходит одинаково независимо от используемого метода.

Базисный план составляется последовательно, в несколько шагов (точнее, $m+n-1$ шагов). На каждом из этих шагов заполняется одна клетка, притом так, что, либо полностью удовлетворяется один из заказчиков (тот, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо полностью вывозится весь запас груза с одной из баз (с той, в строке которой находится заполняемая клетка).

В первом случае мы можем исключить столбец, содержащий заполненную на этом шаге клетку, и считать, что задача свелась к заполнению таблицы с числом столбцов, на единицу меньшим, чем было перед этим шагом, но с тем же количеством строк и с соответственно измененным запасом груза на одной из баз (на той базе, который был удовлетворен заказчик на данном шаге).

Во втором случае исключается строка, содержащая заполняемую клетку, и считается, что таблица сузилась на одну строку при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности заказчика, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Замечание. Может случиться, что уже на некотором (но не на последнем!) шаге потребность очередного заказчика окажется равной запасу груза на очередной базе. Тогда после заполнения очередной клетки объем таблицы как бы одновременно уменьшается на один столбец и на одну строку. Но и при этом мы должны считать, что уменьшение объема таблицы происходит либо на один столбец, а на базе сохраняется «остаток» равный нулю, либо на одну строку, а у заказчика еще осталась неудовлетворенная «потребность» в количестве нуля единиц груза, которая удовлетворяется на одном из следующих шагов. Этот нуль надо записать в очередную заполняемую клетку на одном из последующих шагов.

1.Метод северо – западного угла (диагональный метод).

Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. При этом нулевые перевозки принято заносить в таблицу только в том случае, когда они попадают в клетку, подлежащую заполнению, т.е. в таблицу заносятся только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо поверить, что число занятых клеток равно $m+n-1$ и векторы условий, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Необходимо иметь в виду, что метод северо-западного угла не учитывает стоимость перевозок, поэтому опорное решение, построенное по данному методу, может быть далеким от оптимального.

2. Метод минимального элемента (метод наименьшей стоимости).

Данный метод позволяет построить опорное решение, которое достаточно близко к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C=(c_{ij})$, $i=1,2,\ldots m$; $j=1,2,\ldots n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min\{c_{ij}\}$,и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них. Очередную клетку, соответствующую $\min\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы заканчиваются. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от него требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично поступают с потребителем.

3.Метод двойного предпочтения.

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем :в каждом столбце отмечают галочкой клетку с наименьшей стоимостью. Затем то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют две галочки. В них находится минимальная стоимость, как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченные одной галочкой. В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

1. Метод Фогеля.

Сущность этого метода состоит в следующем: в таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами.

Отмечается наибольшая разность знаком . Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и по выше рассмотренным правилам.

Пусть мы имеем таблицу исходных данных задачи.

Исходное опорное решение будем строить по так называемому правилу **«северо-западного угла».**

Заполним вышеуказанную таблицу, начиная с левого верхнего угла, двигаясь далее или по строке вправо, или по столбцу вниз. В клетку (1;1) занесем меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е.

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\}.$$

Двигаемся далее по первой строке, записывая в соседнюю клетку (1;2) меньшее из числе $a_1 - b_1$ и a_2, т.е.

$$x_{12} = \min\{a_1 - b_1, a_2\}$$

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпаются ресурсы b_m и потребности a_n.

Рассмотрим задачу.

В двух пунктах отправления А и В находится соответственно 150 и 90 т горючего. Пункты № 1, 2 , 3 требуют соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки одной тонны горючего из пункта А в пункты № 1, 2, 3 соответственно 1010, 1000 и 1020 руб. за тонну горючего, а из пункта В – 1012, 1002 и 1008 руб.

Составить оптимальный план перевозок горючего, чтобы общая сумма транспортных расходов была наименьшей.

Решение. Запишем исходные данные в таблицу.

Поставщики		*Потребители*		
		№ 1	*№ 2*	*№ 3*
		60	*70*	*110*
А	*150*	**1006** 60	**1010** 70	**1004** 20
В	*90*	**1012**	**1002**	**1008** 90

Заполнение начнем с клетки (1,1): $x_{11} = \min\{150.60\} = 60$. Первый столбец закрыт. Переходим к клетке (1,2): $x_{12} = \min\{150 - 60; 70\} = 70$. Второй столбец закрыт. Далее клетка (1,3): $x_{13} = \min\{150 - 60 - 70; 110\} = 20$. Так как в третьем столбце оказался остаток, равный 90, то переходим к заполнению клетки (2,3) куда заносим $x_{23} = \min\{90.90\} = 90$.

Так как остатки по строке и столбцу равны нулю, то опорное исходное решение построено. Этому плану соответствуют затраты

$$L(x_{1опор})=1006*60+1010*70+1004*20+1008*90=241\ 860 \text{ руб.}$$

В правиле «северо-западного угла» не учитывается величина затрат c_{mn} . а потому исходное опорное решение часто может быть далеким от оптимального.

Применяют также прием «минимального элемента», в котором учитывается величина c_{mn}. В этом случае построение исходного опорного решения начинают с клетки с наименьшей величиной c_{mn}.

Поставщики		*Потребители*		
		№ 1	*№ 2*	*№ 3*
		60	*70*	*110*
A	*150*	**1006** 40	**1010**	**1004** 110
B	*90*	**1012** 20	**1002** 70	**1008**

В нашем примере с клетки (1,3). $x_{13} = \min\{150;110\} = 110$.Столбец a_3 закрыт. В оставшейся таблице минимальный элемент в клетке (1,1). Переходим к клетке (1,1). $x_{12} = \min\{150 - 110;60\} = 40$. Строка b_1 закрыта . Переходим к клетке (2,3), $x_{23} = \min\{90;70\} = 70$. Остался минимальный элемент в клетке (2,1),

$x_{21} = \min\{90;60 - 40\} = 20$.

Число занятых клеток должно равняться $r=m+n-1=2+3-1=4$.

Применяя это правило, мы получили другой вариант исходного опорного решения, при котором затраты

$L(x_{2опор})$=40*1006+110*1004+20*1012+70*1002=241 360 руб.,

то есть сумма затрат ближе к оптимальному.

$L(x_{2опор})<L(x_{1опор})$

3.Особые случаи постановки решения задач распределительного типа.

Для перехода от одного базиса к другому при решении транспортной задачи используются так называемые циклы.

Циклом пересчета или короче, циклом в таблице перевозок называется последовательность неизвестных , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Одно из неизвестных последовательности свободное, а все остальные-базисные.
2. Каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке.
3. Три последовательных неизвестных не могут находиться в одном столбце или в одной строке.

4. Если, начиная с какого-либо неизвестного, мы будем последовательно переходить от одного к следующему за ним неизвестному то, через несколько шагов мы вернемся к исходному неизвестному.

Если каждые два соседних неизвестных цикла соединить отрезком прямой, то будет получено геометрическое изображение цикла- замкнутая ломаная из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев, одна из вершин которой находится в свободной клетке, а остальные – в базисных.

Для любой свободной клетки таблицы перевозок существует один и только один цикл, содержащий свободное неизвестное из этой клетки, и число вершин в цикле всегда четно.

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

Если допустимое решение $X=(x_{ij})$, $i=1,2,\ldots m$; $j=1,2,\ldots n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i, $i=1,2,\ldots m$ и потребителей v_j, $j=1,2,\ldots n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$U_i+V_j=C_{ij} \text{ при } x_{ij}>0, \quad (1)$$

$$U_i+V_j\leq C_{ij} \text{ при } x_{ij}=0 \quad (2)$$

Группа равенств (1), (2) используется как система уравнений для нахождения потенциалов. Данная система уравнений имеет m+n неизвестных U_i, $i=1,2,\ldots m$ и V_j, $j=1,2,\ldots n$.Число уравнений системы, как и число отличных от нулю координат невырожденного опорного решения, равно m+n -1. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одной из них можно задать значение произвольно, а остальные найти из системы.

Группа неравенств (2) используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобнее представить в следующем виде:

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ при $x_{ij}=0$.

Числа Δ_{ij} называются оценками для свободных клеток таблицы транспортной задачи.

Опорное решение является оптимальным, если для всех векторов условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются при улучшении опорного решения. Для этого находят клетку (l,k) таблицы, соответствующую $\max\{\Delta_{ij}\}=\Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \le 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки (l,k) строят цикл и улучшают решение.

Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом.

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей ,т.е.

   $$\sum_{i=1}^{m} b_j < \sum_{j=1}^{n} a_i ,$$

   то необходимо ввести фиктивного (n+1) –го потребителя с запросами

   $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, равными разности суммарных запросов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц $c_{i(n+1)}=0$.

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

   $$\sum_{i=1}^{m} b_j > \sum_{j=1}^{n} a_i$$

   то необходимо ввести фиктивного (m+1)-го поставщика с запасами

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j}=0$.

3. При составлении первоначального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов.

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.
2. Построить начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом), проверить правильность его построения по количеству занятых клеток (их должно быть m+n-1) и убедиться в линейной независимости векторов условий (используя метод вычеркивания).
3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$U_i+V_j=C_{ij} \text{ при } x_{ij}>0,$$

Которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большое число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

$$u_i=c_{ij}-v_j \text{ при } x_{ij}>0, \text{ если известен потенциал } v_j, \text{ и}$$

$$v_j=c_{ij}-u_{ij} \text{ при } x_{ij}>0, \text{ если известен потенциал } u_i.$$

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется, хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

5. Прейти к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$.

Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетках с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляются базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным m+n-1.

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

4. Примеры решения землеустроительных задач.

Пример 1. При землеустроительном обследовании в хозяйстве было выделено 5 участков с различным плодородием, пригодных для трансформации угодий. Площади этих участков 250, 100, 520, 310 и 130 га. По проекту на них намечается разместить кормовой севооборот площадью 600 га, полевой – 560 га, улучшенные сенокосы – 150 га. Необходимо так распределить севообороты и угодья по участкам, чтобы чистый доход был максимальным.

Дополнительная информация приведена в таблице.

Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке, руб. на 1 га					Проектные площади угодий и севооборотов, га
	1 (пастбище)	2 (пашня)	3 (пашня)	4 (пашня)	5 сенокосы	
Кормовой севооборот	800	1100	800	600	440	600
Полевой севооборот	1000	1800	2000	2200	2000	560
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	150
Площади участков, га	250	100	520	310	130	

На транспортном языке эта задача может быть описана следующим образом: «ресурсы» в источниках *(b_i)* – это площади севооборотов и улучшенных сенокосов, «потребности в ресурсах» *(a_j)*- площади участков; «прибыль от транспортных операций» - *(c_{ij})* – чистый доход с единицы площади; «транспортируемый ресурс» *(x_{ij})* – часть площади *i-го* севооборота или угодья, размещаемого на *j-м* участке; максимизируемая целевая функция – чистый доход хозяйства от рационального размещения и трансформации угодий.

Пример2. В сельскохозяйственном предприятии на пахотных землях выделено пять категорий различной степени эродированности. Площадь земель различной категории:1-980 га, 2-710 га, 3-220 га, 4-100 га, 5-100 га. Необходимо так разместить культуры на землях различной категории, чтобы смыв с поверхности почвы был минимальным. Дополнительная исходная информация дана в таблице.

Культуры	Интенсивность смыва почв при размещениях на землях определенной категории определенной культуры, т/()га-год					Площади культур
	Категории земель					
	1	2	3	4	5	
Озимая пшеница	1,8	4,7	10,2	30,5	61,4	340
Ячмень	2,4	6,3	12,0	34,0	64,0	560
Многолетние травы	0,2	0,8	2,4	4,8	6,4	510
Однолетние	2,3	6,3	11,8	33,5	64,0	360

травы						
Пар чистый	3,8	10,0	30,0	60,0	80,0	340

Пример 3. Три хозяйства имеют семь чересполосных участков, продукция которых используется на кормовые цели. Необходимо так перераспределить участки между хозяйствами, чтобы транспортные затраты на перевозку кормов были минимальными, при условии , что общий объем потребления кормов в каждом хозяйстве сохраняется. Общее производство кормов в хозяйстве на первоначально закрепленных за ним участках : «1 Мая»-6000, «Луч»-4000, «Победа»-10000. Объемы производства кормов на различных участках: 1-1000, 2-2000, 3-3000, 4-2500, 5-1500, 6-9000, 7-1000.Стоимость транспортировки кормов с участков в хозяйства в рублях и первоначальное закрепление участков за хозяйствами представлены в таблице.

Хозяйства	«1 Мая»			«Луч»		«Победа»	
	1	2	3	4	5	6	7
«1 Мая»	5	10	18	22	8	17	6
«Луч»	16	2	31	3	46	17	25
«Победа»	8	25	36	14	13	4	28

Контрольные вопросы.

1) Перечислите основные исходные данные, необходимые для постановки транспортной задачи.
2) Какие транспортные задачи называются сбалансированными? Запишите условие сбалансированности в общем виде.
3) Назовите типы ограничений, задаваемых при постановке транспортной задачи, и запишите их в общем виде.
4) Каково назначение целевой функции транспортной задачи?
5) Каковы виды требований, предъявляемых к целевой функции?
6) Приведите примеры землеустроительных задач, решаемых с помощью транспортной модели.
7) Каков общий вид транспортной таблицы?
8) Что такое решение транспортной задачи? Какие решения называются допустимыми? Оптимальными? Базисными?
9) Каковы основные этапы общей схемы решения транспортной задачи?
10) Назовите разновидности методов нахождения опорного плана транспортной задачи. Качественно опишите, в чем заключаются их различия?
11) Назовите основные пункты алгоритма метода минимального элемента, выполняемые на каждом шаге.

12) Назовите основные пункты алгоритма метода аппроксимации, выполняемые на каждом шаге.
13) Какие транспортные задачи называются несбалансированными?
14) Каковы основные этапы изменения транспортной таблицы при приведении несбалансированной задачи к сбалансированному виду?
15) Что такое блокировка клетки?
16) Назовите основные особенности задач закрепления пастбищ за животноводческими фермами? Какими могут быть критерии оптимальности в таких задачах?
17) Какие реальные факторы делают актуальными задачи закрепления пастбищ за животноводческими фермами? приведите примеры.
18) Какими могут быть критерии оптимальности в задачах устранения недостатков землепользования хозяйств?

Тема 8: Экономико-математический анализ и корректировка оптимальных решений землеустроительных задач, полученных методами линейного программирования.

1. Экономико-математический анализ результатов решения общих задач линейного программирования.
2.Анализ и корректировка результатов решения задач транспортного типа.

Решение задачи симплексным методом позволяет получить оптимальный вариант плана, являющийся наилучшим с точки зрения выбранного критерия оптимальности и поставленных условий задачи. при этом, как известно, оптимальное решение находится в последней симплекс-таблице.
К основным блокам информации, содержащееся в последней симплекс-таблице относятся:

1. собственно оптимальное решение;
2. оптимальное значение целевой функции;
3. коэффициенты замещения;
4. элементы индексной строки, соответствующие небазисным переменным.

Значения элементов индексной строки называют двойственными оценками или, точнее, оценками переменных двойственной задачи линейного программирования. Они позволяют оценить изменения целевой функции при отклонении переменных от нуля. Напомним, что элементы индексной строки, соответствующие переменным, равны нулю.

Основные переменные, попавшие в базис, характеризуют эффективные отрасли хозяйства, которые целесообразно развивать для достижения максимального чистого дохода.

Основные переменные, не попавшие в базис, характеризуют неэффективные отрасли хозяйства, которые развивать не целесообразно.

Экстремальное значение целевой функции- максимальный чистый доход хозяйства, обеспечиваемый при оптимальном сочетании отраслей хозяйства.

Остаточные переменные, попавшие в базис, характеризуют недоиспользованные ресурсы, то есть соответствующие им ресурсы являются недефицитными.

Остаточные переменные , не попавшие в базис, (и, соответственно, равные нулю), характеризуют полностью исчерпанные, то есть дефицитные ресурсы.

Коэффициенты, стоящие в i- х строках и j-х столбцах последней симплекс – таблицы, называются коэффициентами замещения или коэффициентами структурных сдвигов. Они показывают, как изменяется значение базисной переменной из i- й строки при изменении небазисной переменной на единицу (то есть при введении в оптимальный план небазисной переменной), соответствующей j-у столбцу.

Коэффициентами замещения или коэффициентами структурных сдвигов они называются прежде всего потому, что с их использованием можно корректировать оптимальное решение по данным последней симплекс-таблицы, «замещая» значения базисных переменных небазисными. При этом существенно экономится время на приближение оптимального решения к новым экономическим условиям, возникающим после решения задач.

Увеличение дефицитных, то есть исчерпанных полностью ресурсов, например , выявление их резервов или дополнительное привлечение извне, должно способствовать развитию некоторых отраслей и увеличению чистого дохода хозяйства целом. Соответственно, уменьшение дефицитных ресурсов приведёт противоположному эффекту.

Коэффициенты замещения в последней симплекс-таблице могут использоваться для отыскания новых решений, близких по значению целевой функции к оптимальному и не нарушающих исходные ограничения задачи. При этом в определенных пределах изменения в оптимальный план могут вноситься без пересчета всего плана. Такая корректировка оптимального решения основана на фундаментальном свойстве решений симплексных задач-сохранять свою структуру, а также значения коэффициентов замещения и элементов индексной строки при «малых» изменениях небазисных переменных.

Контрольные вопросы.

1) Какому изменению ресурсов соответствует введение в оптимальный план положительного значения остаточной переменной?
2) В каких случаях может оказаться необходимой корректировка оптимального плана решения задач линейного программирования?
3) Что такое «двойственные оценки оптимального плана задачи линейного программирования»?
4) Каков смысл термина скрытые цены?
5) Что характеризуют :
   основные переменные, попавшие в базис последней симплексной таблицы?
   основные переменные, попавшие в базис последней симплексной таблицы?
6) Что характеризуют коэффициенты замещения симплекс-таблицы?
7) Что означает выражение «ввести в оптимальный план небазисную переменную»?
8) Назвать основные действия по введению в оптимальный план небазисной избыточной переменной.
9) Как определить допустимые значения вводимой в оптимальный план небазисной остаточной переменной?
10) Назвать основные виды корректировки решения транспортной задачи.

Тема 9: Общая модель нелинейного программирования.

1. Постановка задачи.
2. Некоторые землеустроительные задачи, решаемые методами нелинейного программирования.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ [nonlinear programming] — раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач с нелинейной целевой функцией и (или) областью допустимых решений, определенной нелинейными ограничениями. В экономике это соответствует тому, что результаты (эффективность) возрастают или убывают непропорционально изменению масштабов использования ресурсов (или, что-то же самое, масштабов производства): напр., из-за деления издержек производства на предприятиях на переменные и условно-постоянные; из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую.

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, i = \overline{1, m_1}; \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции $L=f(x_1,x_2,\dots x_n)$,

где x_j- переменные; $j=1,2,\dots n$; L,f, g_i-заданные функции от n переменных; b_i-фиксированные значения.

Нелинейное программирование применяется при прогнозировании промышленного производства, управлении товарными ресурсами, планировании обслуживания и ремонта оборудования и т. д.

Из нелинейного программирования наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено для определенного класса целевых функций.

Необходимо отметить, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией точки могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому имеется возможность в качестве оптимального решения принять локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

Классификация методов нелинейного программирования.

Для решения задачи нелинейного программирования было предложено много методов, которые можно классифицировать по различным признакам.
По количеству локальных критериев в целевой функции методы нелинейного программирования делятся на:

- однокритериальные,
- многокритериальные.

По длине вектора $\overline{X}$ методы делятся на:

- однопараметрические или одномерные (n=1),
- многопараметрические или многомерные (n>1).

По наличию ограничений методы нелинейного программирования делятся на:

- без ограничений (безусловная оптимизация),
- с ограничениями (условная оптимизация).

По типу информации, используемой в алгоритме поиска экстремума методы делятся на:

- методы прямого поиска, т.е. методы, в которых при поиске экстремума целевой функции используются только ее значения;
- градиентные методы первого порядка, в которых при поиске экстремума функции используются значения ее первых производных;
- градиентные методы второго порядка, в которых при поиске экстремума функции наряду с первыми производными используются и вторые производные.

Ни один метод нелинейного программирования не является универсальным. В каждом конкретном случае необходимо приспосабливать применяемый метод к особенностям решаемой задачи.

В задаче ЛП допустимое множество R всегда является выпуклым с конечным числом крайних точек. Поэтому воспользовавшись симплекс-методом и перебрав только крайние точки, можно за конечное число шагов найти оптимальное решение. В задачах НП, наоборот, выпуклость допустимого множества и конечность числа его крайних точек совсем необязательны. Это и служит причиной основной трудности решения задач НП.

Рассмотрим некоторые важные понятия и теоремы классического анализа, которые лежат в основе классических методов поиска условного экстремума.

Теорема 1. (теорема существования экстремума). Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - непрерывная функция, определенная на замкнутом и ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве, по крайней мере один раз, своих максимального и минимального значений.

Следующая теорема определяет возможные местоположения максимума (или минимума).

Теорема 2. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является непрерывной функцией нескольких переменных, определенной на допустимом множестве R, то максимальное значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если оно существует, достигается в одной или нескольких точках, которые принадлежат одному из следующих множеств: 1) S1 - множество стационарных точек; 2) S2 - множество точек границы; 3) S3 - множество точек, где функция недифференцируема.

Определение 1. Множество точек S1(x1, x2, ..., xn) функции f(x) называется множеством стационарных точек, если они удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1, n}$$

Определение 2. Функция f(x) достигает локального максимума в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$, если для всех точек x, лежащих в малой окрестности точки $\left[x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right]$ имеет место неравенство

$f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right) \geq f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$

Определение 3. Функция f(x) достигает глобального (абсолютного) максимума в точке x0, если для всех точек $x \in R$ справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$

Для нахождения стационарных точек функции f(x) можно использовать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в некоторой допустимой области R. Если в некоторой внутренней точке области R функция f(x) достигает относительного максимума, то $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}$

Для того чтобы определить, являются ли найденные стационарные точки точками максимума или минимума, необходимо исследовать функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности стационарных точек и определить, является она выпуклой или вогнутой.

Задачи на безусловный экстремум.

Среди множества оптимизационных задач выделяют группу классических задач оптимизации на безусловный экстремум. Общая постановка таких задач такова: найти вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,при котором достигается наибольшее или наименьшее значение скалярной непрерывно дифференцируемой функции f(x):

$$f(\overline{x}) \to \max(\min)$$

В основе решения классических задач оптимизации лежит теория дифференциального исчисления.

Пусть f(x)- действительная дважды непрерывно дифференцируемая функция аргумента $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Требуется найти наибольшее (или наименьшее) значение данной функции и такое значение аргумента $\overline{x}_0$ (оптимальное решение), при котором этот экстремум достигается .

Если $\overline{x}_0$ точка является точкой экстремума функции, то она является стационарной точкой функции, т.е. частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x_0}) = 0, i = \overline{1,n}$$

Таким образом, экстремумы функции следует искать среди ее стационарных точек. Однако ,возможно, не каждая стационарная точка является точкой экстремума.

Для решения вопроса о наличии экстремума функции многих переменных в стационарной точке находят значения вторых частных производных в этой точке и из полученных чисел составляют матрицу, которая называется матрицей Гессе:

$$f''(\overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\overline{x_0}) \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overline{x_0}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overline{x_0}) \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\overline{x_0}) \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы функция f(x) имела в стационарной точке локальный минимум, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все главные диагональные миноры матрицы Гессе были положительны.

Для того, чтобы функция f(x) имела в стационарной точке локальный максимум, необходимо и достаточно, чтобы у матрицы Гессе главные диагональные миноры нечетных степеней были отрицательны в этой точке, а миноры четных степеней – положительны.

Порядок решения задач на безусловный экстремум.

1. Найти $f'(x)$ и составить систему:

$$\begin{cases} f_{x_1}'(x) = 0 \\ \ldots\ldots \\ f_{x_n}'(x) = 0 \end{cases}$$

2. Найти все решения полученной системы (стационарные точки).

Пусть x_0- одна из критических точек.

3. Найти $f''(x_0)$.

4. Вычислить все главные миноры . Возможны три варианта:

- ✓ Все миноры положительные .В этом случае точка является точкой локального минимума.
- ✓ Знаки миноров чередуются, начиная с «-». В этом случае точка является точкой локального максимума.

- ✓ Во всех остальных случаях стационарная точка не является точкой локального экстремума.

<u>Замечание.</u> Если хотя бы один из главных миноров равен нулю, то наличие точек экстремума необходимо определять прямым путем: составить приращение функции в окрестности точки и исследовать знак этой погрешности.

Задачи на условный экстремум (Метод множителей Лагранжа).

Многие задачи оптимизации имеют своей математической моделью следующую задачу на экстремум с ограничениями типа равенств:
$L=f(x_1,x_2,\ldots x_n)\to\max(\min)$
при ограничениях
$g_i(x_1,x_2,\ldots x_n)=0$, $i=1,2,\ldots,m$.
Предположим , что функции $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $g_i(x_1,x_2,\ldots x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.
Ограничения заданы в виде уравнений , поэтому для решения задачи воспользуемся методом отыскания условного экстремума функции нескольких переменных.
Для решения задачи составляется функция Лагранжа

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

где λ_i – множители Лагранжа

Затем определяются частные производные :

$$\frac{\partial F}{\partial x_J},\ j=\overline{1,n},\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i},\ i=\overline{1,m}$$

Приравнивая к нулю частные производные , получаем систему. Решая систему, получим множество точек , в которых целевая функция L может иметь экстремальные значения. Следует отметить, что условия рассмотренной системы являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому не всякое полученное решение определяет точку экстремума целевой функции.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$y=5+6x_1+4x_2-3x_1^2-x_2^2$$

Решение.

Найдем стационарные точки. Для этого найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6 - 6x_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 4 - 2x_2$$

Приравняем их к нулю и решим систему

$$\begin{cases} 6 - 6x_1 = 0 \\ 4 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Получили одну стационарную точку A(1;2). Проверим, является ли она точкой экстремума.

Найдем вторые частные производные и составим матрице Гессе.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -6 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -2$$

$$f''(A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = |-6| < 0$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Функция имеет в т. А локальный максимум.

$\bar{x}_{\max} = (1;2),\ y_{\max} = 12$

Пример 2. Найти экстремум функции $z = 2x_1 + 4x_2$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 = 8$.

Решение. Заметим, что функции z и $\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 4x_2 + \lambda(x_1^2 + 4x_2^2 - 8)$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 + 2x_1\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 + 8x_2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + 4x_2^2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1\lambda = -1 \\ x_2\lambda = -\dfrac{1}{2} \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = 8 \end{cases}$$

$\lambda^2 = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$.

Получаем две стационарные точки:

1) при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$: $A = (-2;-1)$
2) при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$: $B = (2;1)$.

Принимая во внимание, характер целевой функции, линиями уровня которой являются плоскости, и функции $\phi(x_1, x_2)$ (эллипс) заключаем, что в т. A функция z принимает минимальное значение, в т. B максимальное.

$z_{\min} = -8$

$z_{\max} = 8$

$\phi(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2^2 - 8$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 2x_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 8x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 8\lambda \end{cases}$$

Составим определитель $\Delta = B^2 - AC$

Подсчитаем определитель в точке A, то есть подставим значения $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2\lambda = 1 > 0$$

$$B = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 8\lambda = 4 > 0$$

1) $\Delta = -4 < 0$
   A>0
   Значит, в этой точке локальный минимум.

Подсчитаем определитель в точке B, то есть подставим значения $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2\lambda = -1 < 0$$

$$B = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 8\lambda = -4 < 0$$

2) $\Delta = -4 < 0$

A<0

Значит, в этой точке локальный максимум.

Существует еще третий случай:

3) $\Delta > 0$ нет экстремума.

Контрольные вопросы.

1) В чем особенность постановки задачи нелинейного программирования.
2) Классификация методов нелинейного программирования.
3) Алгоритм решения задач на безусловный экстремум.
4) Алгоритм решения задач на условный экстремум.
5) В чем особенность нелинейного программирования?
6) Отличие задачи нелинейного программирования от задач линейного программирования.
7) В чем заключатся метод множителей Лагранжа?
8) Что такое стационарная точка?
9) Как определить оптимальность стационарной точки?
10) Для чего строят матрицу Гессе?
11) Отличие условной оптимизации от безусловной.
12) Как определить является ли стационарная точка точкой экстремума?

Решение задач линейного программирования средством табличного процессора MS Excel.

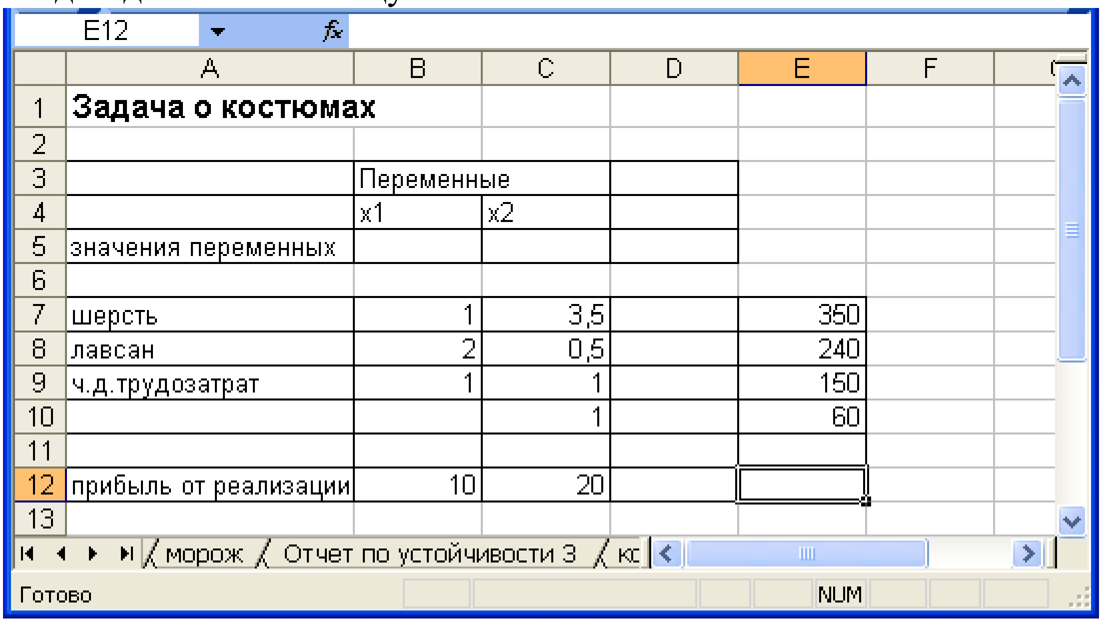
Задача 1. *О планировании выпуска продукции пошивочному предприятию. (Задача о костюмах).*

Намечается выпуск двух видов костюмов - мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм - 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского - 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Решение.
Составим таблицу данных.

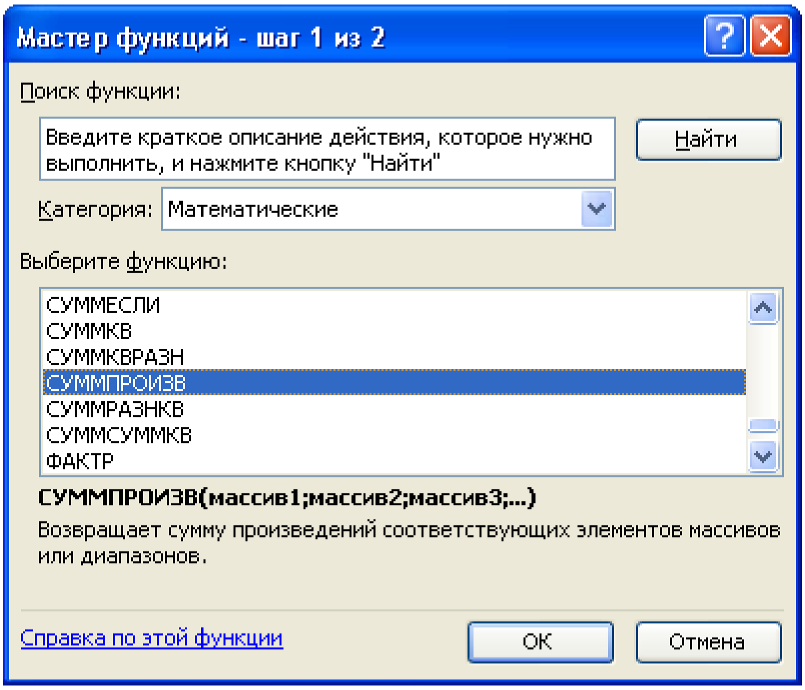
Сырье	*Виды продукции*		*Наличие сырья*
	Женский костюм	*Мужской костюм*	
Лавсан	1	3,5	350
Шерсть	2	0,5	240
Человеко/день	1	1	150
Прибыль от реализации	10	20	

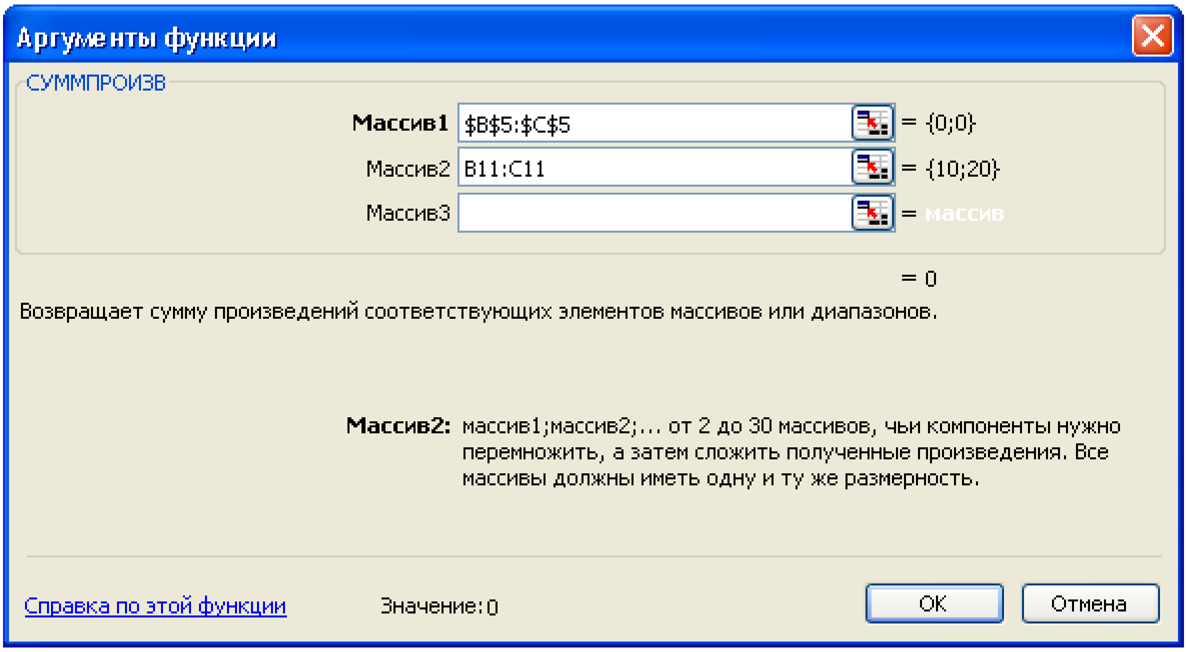
Введем следующие обозначения: x_1 - число женских костюмов; x_2 - число мужских костюмов.
Введем данные в таблицу Excel.



	A	B	C	D	E
1	**Задача о костюмах**				
2					
3		Переменные			
4		x1	x2		
5	значения переменных				
6					
7	шерсть	1	3,5		350
8	лавсан	2	0,5		240
9	ч.д.трудозатрат	1	1		150
10			1		60
11					
12	прибыль от реализации	10	20		
13					

Значения x_1 и x_2 будет отображать в ячейках B_5:C_5, оптимальное значение целевой функции в ячейке E_{11}.
1. Ввести формулу в ячейку E_{11}. *Вставка–Функция.*





2. Введем ограничения, т.е. в ячейки D_7:D_{10} надо ввести формулы

$x_1 + 3{,}5x_2 \le 350$

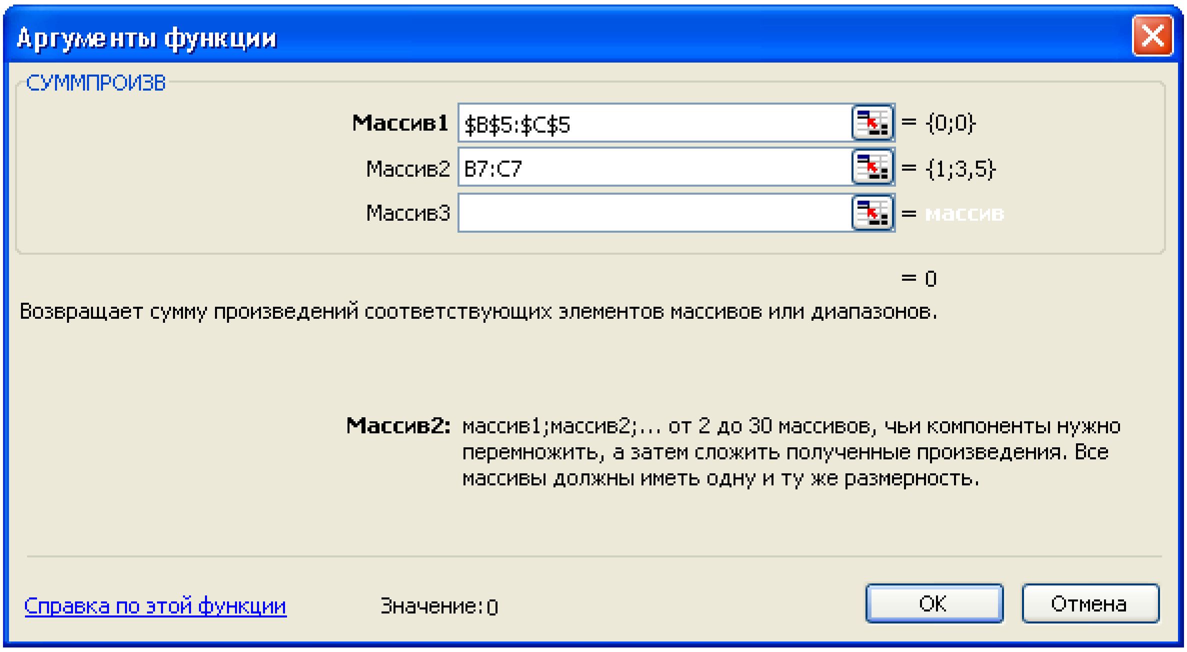
$2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240$

$x_1 + x_2 \le 150$

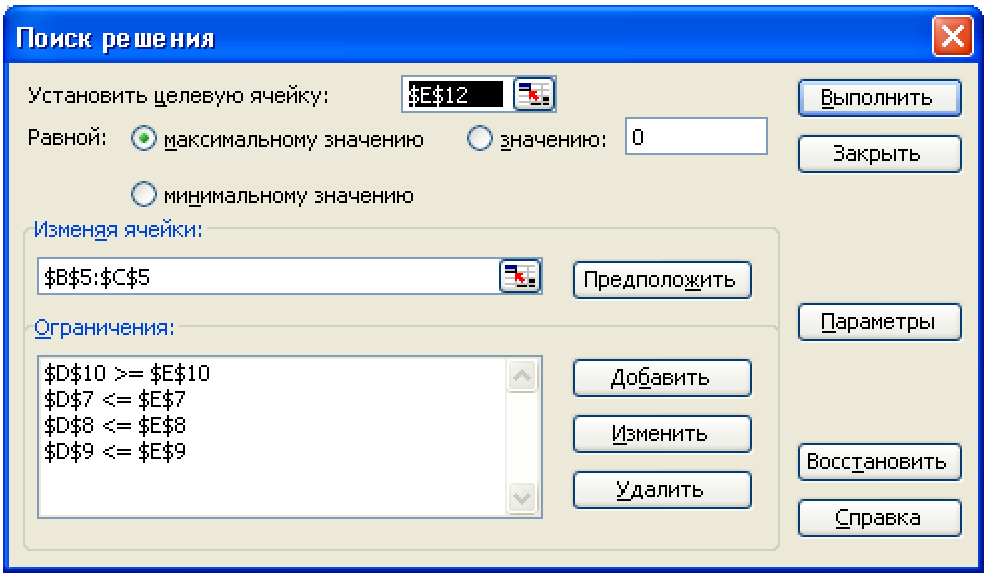
$x_2 \ge 60$

$x_1 \ge 0$

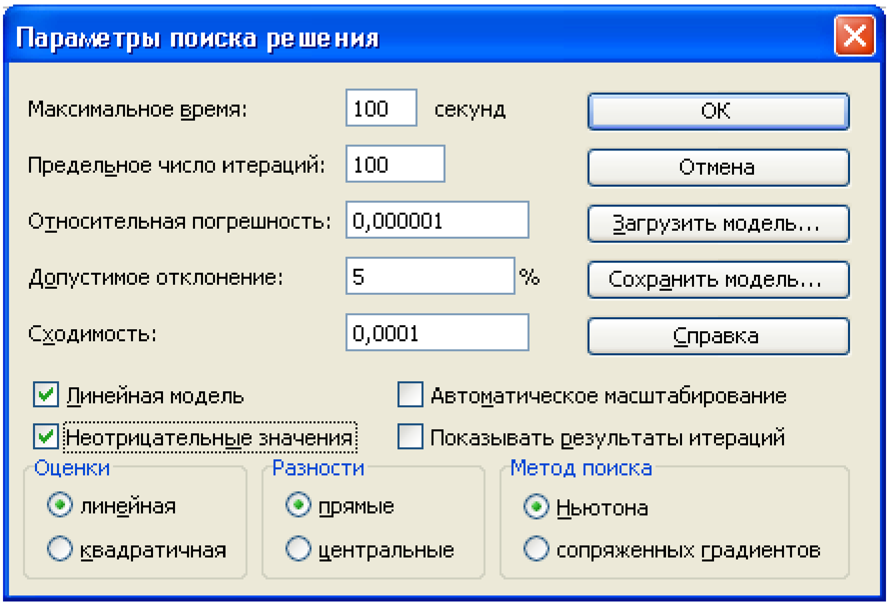
В ячейку D_7 ввести формулу



3. Используя маркер, ввести формулу в остальные ячейки D_8, D_9, D_{10}.
4. Найдем значения целевой функции и значения переменных x_1 и x_2. Выполнить команду *Сервис–Поиск решения* и ввести данные (данные вводить, пользуясь мышью).



5.Войти в меню параметры и установить флажки как на рисунке (линейная модель и неотрицательные значения).



6. Нажать на кнопку *ОК* и на кнопку *Выполнить*.
7. Сохранить отчет (тип отчета- Устойчивость).
8. В результате появится заполненная таблица и отчет.

Получили ответ, чтобы получить максимальную прибыль 2300 руб. надо сшить 70 женских и 80 мужских костюмов.

Задача 2. *(задача о коврах)*.

Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т. п. Допустим, например, ресурсы трех видов рабочая сила, сырье и оборудование имеются в количестве соответственно 80(чел/дней), 480(кг), 130(станко/часов). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса необходимых для производства одного ковра каждого вида и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл.1.

Таблица 1

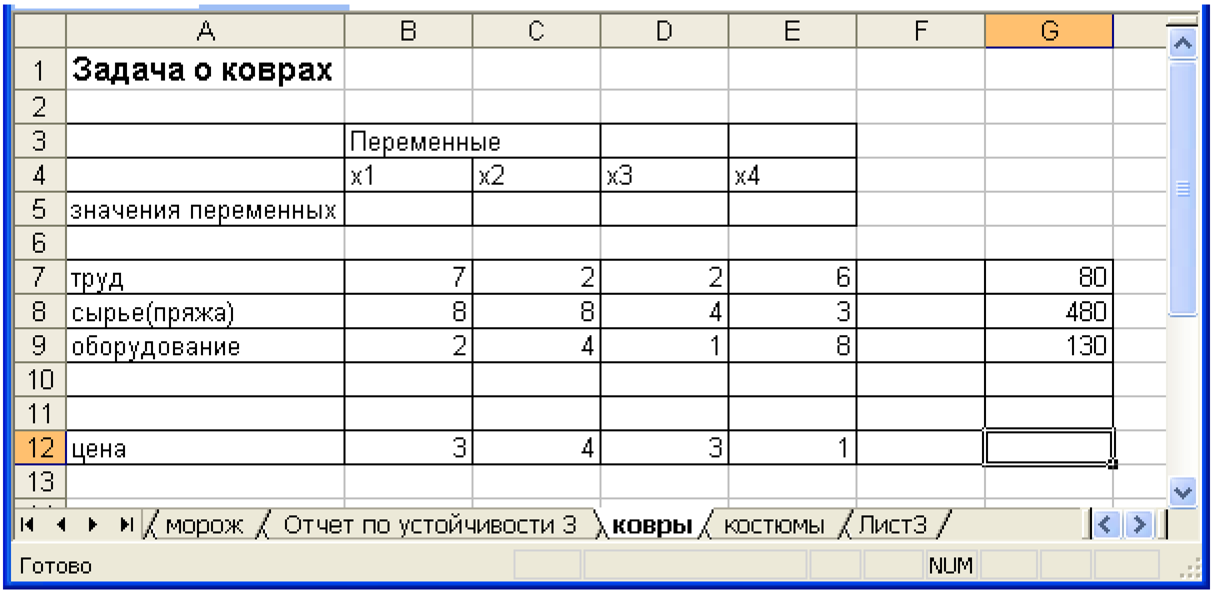
	Ковер «Русская красавица»	Ковер «Мой Дагестан»	Ковер Горный край»	Ковер «Медальон»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье (пряжа)	5	8	4	3	480

Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальная.

Задание. Составить экономико-математическую модель и решить средствами табличного процессора Excel.

1) Ввести данные как на рисунке.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Задача о коврах**						
2							
3		Переменные					
4		x1	x2	x3	x4		
5	значения переменных						
6							
7	труд	7	2	2	6		80
8	сырье(пряжа)	8	8	4	3		480
9	оборудование	2	4	1	8		130
10							
11							
12	цена	3	4	3	1		
13							

2) В ячейке G12 подставить формулу для подсчета целевой функции (*Вставка–Функция*, использовать функцию СУММПРОИЗВ).

3) В ячейки F7:F9 вставить формулы для ограничений.

4) Используя команду *Сервис–Поиск решения* найти оптимальное решение задачи.

Правильный ответ. Максимальный доход 150 тыс. руб. фабрика может получить при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида. При этом ресурсы труд и оборудование будут использованы полностью, а из 480 кг пряжи (ресурс сырье) будет использовано 280 кг.

Список литературы.

№ п/п	Автор издания	Название	Место, год издания, издательство
1	Ларчеко Е.Г.	Вычислительная техника и экономико-математические методы в землеустройстве.	М.: Недра, 1973
2	Волков С.Н.	Землеустроительное проектирование.	М.: Колос, 2002
3	Волков С.Н., Л.С. Твердовская	Практикум по экономико-математическим методам и моделированию в землеустройстве.	М.: Колос, 1999
4	Хачатрян С.Р., Пинегина М.В., Буянов В.П.	Методы и модели решения экономических задач.	М., 2005
5	Орлова И.В.	Экономико-математическое моделирование. Практическое пособие по решению задач	М., 2005
6	Федосеев В.В.	Экономико-математические методы и прикладные модели.	М., 2003
7	Кундышева Е.С	Математическое моделирование в экономике. Учебное пособие.	М., 2004
9	Хазанова Л.Э.	Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие.	М.: Изд-во «БЕК», 1998
10	Колемаев В.А., Малыхин В.И. и др.	Математические методы принятия решений в экономике: Учебник	М.: ЗАО «Финстатинформ», 1999
11	Колемаев В.А.	Математическая экономика: Учебник для вузов.	М.: «ЮНИТИ», 1998
12	Малыхин В.И.	Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие для вузов.	М.: Изд-во «УРАО», 1998
13	Кремер Н.Ш., Путко Б.А. и др.	Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов.	М.: «ЮНИТИ», 1997

14	Аронович А. Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П.	Сборник задач по исследованию операций.	М.: Изд-во МГУ, 1997
25	Акулич И.Л.	Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для эконом. спец. вузов.	М.: «Высш. шк.», 1986
26	Конюховский П.В.	Математические методы исследования операций.	С.-Пб.: «Питер», 2001
27	Мастяева И.Н., Семенихина О.Н.	Методы оптимизации: Учебное пособие.	М.: Изд-во МЭСИ, 2000
28	Мастяева И.Н., Горбовцов Г.Я., и др.	Прикладная математика: Учебное пособие.	М.: Изд-во МЭСИ, 2000
29	Горбовцов Г.Я.	Методы принятия решений: Учебное пособие	М.: Изд-во МЭСИ, 1999
30	Лагоша Б.А., Дегтярева Т.Д.	Методы и задачи теории оптимального управления (с разбором решений): Учебное пособие.	М.: Изд-во МЭСИ, 2000
31	Горбовцов Г.Я.	Методы оптимизации: Учебно-практическое пособие.	М.: Изд-во МЭСИ, 2000
32	Федосеев В.В., Гармаш А.Н. и др.	Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов.	М.: «ЮНИТИ», 2000
33	Замков О.О.,Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.	Математические методы в экономике: Учебник.	М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд-во «Дело и Сервис», 1999